פתרון ע"י תורי חזקות

$y''+P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=0$, P,Q אנליטיים.

- $\underline{x=x_0}$ נקודה אורדינלית: פתרון $y=\sum a_n\left(x-x_0\right)^n$
a_0,a_1 חופשיים(כל השאר נקבעים על פיהם) - זה נותן פתרון כללי.

- $\underline{x=x_0}$ נקודה רגולרית סינגולרית: מחפשים פתרון בצורה $(a_0\neq 0)$ $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^{n+\alpha}$.
קיים לפחות פתרון אחד כזה.

דוגמה(של נק. רגולרית סינגולרית)

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0\quad \nu\geq 0$$

ν(האות היוונית "נו") קבוע

$$y''+\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית(סינגולרית)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha\right)a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha-1\right)a_nx^{n+\alpha-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha\right)\left(n+\alpha-1\right)a_nx^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\alpha\right)a_nx^{n+\alpha}+...$$

$$...+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\nu^2a_nx^{n+\alpha}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n+\alpha\right)^2-\nu^2\right]a_nx^{n+\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha+2}=0$$

- מקדם של x^α: $\cancel{a_0}=0$ $\left(\alpha^2-\nu^2\right)$. "משוואה מאפיינת" $\alpha=\pm\nu$
- מקדם של $x^{\alpha+1}$: $\left(\left(1+\alpha\right)^2-\nu^2\right)a_1=0$, $\left(1+2\alpha\right)a_1=0$

– מקרה מיוחד $\nu=\frac{1}{2},\alpha=-\frac{1}{2}$ מתקיים לגר

– אחרת $a_1=0$

- מקדם של $x^{\alpha+m}$, $m\geq 2$

$$\left((m+\alpha)^2-\nu^2\right)a_m+a_{m-2}=0$$

נסתכל על שתי האופציות לα, $\alpha=+\nu$ ו$\alpha=-\nu$

$\underline{\alpha=+\nu}$ $\quad a_1=0$. לכל $m\geq 2$:

$$\left(m^2+2\nu m\right)(a_m+a_{m-2})=0$$

$$a_m=\frac{-a_{m-2}}{m(m+2\nu)}$$

$$a_1=a_3=a_5=...=0$$

$$a_2=\frac{-a_0}{2(2+2\nu)}$$

$$a_4=\frac{-a_2}{4(4+2\nu)}=\frac{a_0}{2\cdot 4(2+2\nu)(4+2\nu)}$$

$$a_6=\frac{-a_0}{2\cdot 4\cdot 6(2+2\nu)(4+2\nu)(6+2\nu)}$$

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p a_0}{2^{2p}p!(1+\nu)(2+\nu)...(p+\nu)}$$

וקיבלנו שהפתרון הראשון הוא

$$\boxed{y=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p}p!(1+\nu)(2+\nu)...(p+\nu)}}$$

$\underline{\alpha=-\nu}$ $\quad a_1=0$ אלא אם כן $\nu=\frac{1}{2}$, ואז a חופשי. לכל $m\geq 2$:

$$\left(m^2-2m\nu\right)a_m+a_{m-2}=0$$

$$a_m=\frac{-a_{m-2}}{m(m-2\nu)}$$

אלא אם כן 2ν הוא $2,3,4,...$(מספר שלם גדול או שווה ל2) - כלומר $\nu\in\left\{1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},...\right\}$.

מקרה I 2ν אינו שלם. הפתרון השני הוא

$$\boxed{y=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\,x^{2p-\nu}}{2^{2p}p!\,(1-\nu)\,(2-\nu)\ldots(p-\nu)}}$$

מקרה II 2ν שלם אי זוגי. הm הבעייתי הוא אי זוגי, אבל על ידי הבחירה $a_1=0$ יוצא $a_3=a_5=\ldots=0$ והרקורסיה לפני המחילוק מתקיים. הפתרון השני עדיין תקף.

מקרה III 2ν שלם זוגי $\Leftrightarrow$ $\nu=0,1,2,\ldots$. כרגע יש רק פתרון אחד.

סיכום

$$\nu\geq 0\quad x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$$

חיפשנו פתרון $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\,x^{2p+\nu}}{2^{2p}p!\,(1+\nu)\,(2+\nu)\ldots(p+\nu)}$.

- אם ν אינו שלם... פתרון כללי $y=C_1f_\nu(x)+C_2f_{-\nu}(x)$.
- אם ν שלם כרגע מצאנו רק פתרון אחד $f_\nu(x)$(עד כדי כפל בקבוע)

המקרה הכללי

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=0$$

$x=x_0$ נק. רגולרית סינגולרית. הפונקציות P,Q לא טובות לנו(כי לא בטוח שיש להם גבולות בx_0) ולכן נכתוב

$$\left(x-x_0^2\right)y''+\left[P(x)\,(x-x_0)\right](x-x_0)\,y'+\left[(x-x_0)^2\,Q(x)\right]y=0$$

בגלל שx_0 רקולדית סינגולרית מתקיים:

$$P(x)\,(x-x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}p_0$$

$$Q(x)\,(x-x_0)^2\xrightarrow[x\to x_0]{}q_0$$

המשוואה $(x-x_0)^2\,y''+p_0\,(x-x_0)\,y'+q_0y=0$ היא משוואת אוילר. הפתרונות של משוואת אוילר זו הם $(x-x_0)^\lambda$ כאשר λ הוא פתרון של $\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0$ - המשוואה המציינת indicial equation

משפט פרובניוס(הכללי)

- אם ההפרש בין שתי הפתרונות של המשוואה המציינת <u>אינו שלם</u> אזי ניתן למצוא שני פתרונות בת"ל

$$y_1 \approx C_1 (x - x_0)^{\lambda_1}$$

$$y_2 \approx C_2 (x - x_0)^{\lambda_2}$$

כאשר λ_1, λ_2 שני השורשים של המש' המציינת)

- <u>אם ההפרש הוא שלם</u> אזי ניתן למצוא פתרון אחד $y_1 \approx C_1 (x - x_0)^{\lambda_1}$ כאשר λ_1 הוא הפתרון הגדול יותר.

הפתרונות הם בקירוב כי הפתרון המדוייק הוא טור אינסופי.

המשך לגבי הפתרון השני

אם יש בעיה בפתרון השני, בד"כ הפתרון השני הוא היותר קטן.
יש לנו כבר פתרון אחד. נשתמש בהורדת סדר.
y_1 פתרון - נחפש פתרון שני בצורה $y = zy_1$ (z פונקציה)

$$y' = z'y_1 + zy_1'$$

$$y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$$

$$(z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'') + P(x)(z'y_1 + zy_1') + Q(x) zy_1 = 0$$

$zy_1'', P(X) zy_1', Q(x) zy_1$ מצטמצמים כי y_1 מקיים את המשוואה, ונקבל

$$z''y_1 + z'(2y_1' + P(x) y_1) = 0$$

נכתוב $z' = w$

$$w' + w\left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right) = 0$$

$$\frac{w'}{w} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right)$$

$$\ln w = -2\ln y_1 - \int P(x)\, dx$$

אנחנו יודעים שp_0 $\xrightarrow{x \to x_0}$ $(x - x_0) P(x)$, ולכן סמוך לx_0 $P(x) \approx \frac{p_0}{x - x_0}$. לכן:

$$\ln w \approx -2\ln y_1 - p_0 \ln(x - x_0)$$

$$w \approx \frac{1}{y_1^2 (x-x_0)^{p_0}} \approx \frac{\text{const}}{(x-x_0)^{p_0+2\lambda_1}}$$

כאשר λ הוא פתרון של $\lambda(\lambda-1)+p_0\lambda+q_0=0$
אם היינו עושים מדוייק היינו מקבלים

$$w = \frac{1}{(x-x_0)^{p_0+2\lambda_1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$$z' = w$$

$$z = \frac{1}{(x-x_0)^{p+2\lambda_1-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n + C \ln(x-x_0)$$

כאן אנו רואים את הבעיה - לרוב הפתרון הוא טור חזקות, אבל לפעמים חזקה אחת($n=p_0+2\lambda_1-1$) הופכת ל-ln.

$$y = zy_1 = \frac{1}{(x-x_0)^{p_0+\lambda_1-1}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n + Cy_1 \ln(x-x_0)$$

המשוואה המציינת היא $\lambda^2+\lambda(p_0-1)+q_0=0$

$$\lambda_1+\lambda_2 = 1-p_0 \Rightarrow p_0+\lambda_1-1 = -\lambda_2$$

ולכן(נציב בפתרון)

$$y = (x-x_0)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n + Cy_1 \ln(x-x_0)$$

כלומר מצאנו את מה שהיה חסר בפתרון השני, ולכן:

- פתרון ראשון $y_1 \sim C_1 (x-x_0)^{\lambda_1}$
- פתרון שני $y_2 \sim C_2 (x-x_0)^{\lambda_2} + Cy_1 \ln(x-x_0)$

רק במקרה ש$p_0+2\lambda-1$ שלם $\Leftrightarrow$ $\lambda_1-\lambda_2$ שלם

הפתרון השני

כאשר $\lambda_1-\lambda_2$ השלם חיובי,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\lambda_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n (x-x_0)^n$$

$$y_2(x) = (x-x_0)^{\lambda_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z_n (x-x_0)^n + C \log (x-x_0)\, y_1(x)$$

ייתכן $C=0$.

במקרה $\lambda_1 = \lambda_2$ אזי C בהכרח לא 0(וניתן לקחת $C=1$)

דוגמה

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

$\nu \geq 0$ שלם. עד כאן פתרון אחד $y = f_\nu(x)$ כאשר $f_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\nu}}{2^{2p} p! (1+\nu)(2+\nu)\ldots(p+\nu)}$

אם $\nu = 0$ אז המשוואה היא $xy'' + y' + x\lambda = 0$, והפתרון הוא הראשון הוא $y_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{2^{2p} (p!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{64} - \ldots$

פתרון שני?

$$y = zy_1$$

$$x\left(z'' y_1 + 2z' y_1' + 2y''\right) + \left(z' y_1 + z y_1'\right) + xzy_1 = 0$$

לפי שיטת הורדת הסדר זה מצטמצם ל:

$$xw' y_1 + w\left(2xy_1' + y_1\right) = 0$$

$$\frac{w'}{w} = -\frac{2y_1'}{y_1} - \frac{1}{x}$$

$$\ln w = -2 \ln y_1 - \ln x + C_1$$

$$w = \frac{C_2}{xy_1^2}$$

$$z = \int w dx = \int \frac{C_2}{xy_1^2} dx + C_3$$

$$y = C_3 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{dx}{xy_1^2}$$

כדי לקבל פתרון שני(ששונה מהראשון) צריך $C_2 \neq 0$. ניקח $C_2 = 1$ והפתרון השני מקבל צורה של $y_1 \ln x + *$ כאשר * פונקציה אנליטית.

נקודה סינגולרית ב∞

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

אם רוצים להסתכל על התנהגות הפתרון כאשר $x \to \infty$

מחליפים קואורדינטות ל-$z = \frac{1}{x}$ (ונסתכל ב$z = 0$)

$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{d}{dz} = -\frac{1}{x^2}\frac{d}{dz} = -z^2\frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = z^2\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{d}{dz}\right) = z^4\frac{d^2}{dz^2} + 2z^3\frac{d}{dz}$$

$$\left(z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}\right) - z^2P\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dy}{dz} + Q\left(\frac{1}{z}\right)y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \underbrace{\frac{2z - P\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}}_{\text{new } P(z)}\frac{dy}{dz} + \underbrace{\frac{1}{z^4}Q\left(\frac{1}{Z}\right)}_{\text{new } Q(z)}y = 0$$

- נק. אורדינרית ב∞ אם הפונקציות P, Q החדשות "מתנהגות יפה" (אנליטיות) ב$z = 0$
- רג. סינג. אם $\lim_{z\to 0}\frac{2z - P\left(\frac{1}{z}\right)}{z}$, $\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2}Q\left(\frac{1}{2}\right)$ קיימים.

דוגמה

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + cy = 0$$

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{c}{1 - x^2}y = 0$$

$$P(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}, Q(x) = \frac{C}{1 - x^2}$$

$$\frac{2z - P\left(\frac{1}{t}\right)}{z^2} = \frac{2z - \frac{-2/z}{1 - 2/z^2}}{z^2} = \frac{2z + \frac{2z}{z^2 - 1}}{z^2} = \frac{z}{z}\left(1 + \frac{1}{z^2 - 1}\right) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

$$\frac{1}{z^4}Q\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^4}\frac{c}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{c}{z^2\left(z^2-1\right)}$$

בקואורדינטה החדשה:

$$\frac{d^2y}{dz}+\frac{2z}{z^2-1}\frac{dy}{dz}+\frac{c}{z^2\left(z^2-1\right)}y=0$$

הפונקציות P,Q החדשות מקיימות:

- $\frac{2z}{z^2-1}$ - אנליטי ב$z=0$
- $\frac{c}{z^2\left(z^2-1\right)}$ - סינגולריות, רגולרי סינגולרית