

מתמטיקה בדידה – תרגיל 4

1. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a = b\}$

2. עבור כל אחד מהיחסים הבאים המוגדרים מעל \mathbb{R} (הממשיים) קבע האם הוא יחס שקילות:

א. $|x - y| < 1 \Leftrightarrow xRy$

ב. $x - y < 1 \Leftrightarrow xSy$

ג. $x - y < -1 \Leftrightarrow xTy$

3. יהיו $R \subseteq A \times B$, $V \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $W \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times B$ הוכח כי:

א. $(R \subseteq V) \wedge (S \subseteq W) \Rightarrow S \circ R \subseteq W \circ V$

ב. $(S \cup W) \circ R = (S \circ R) \cup (W \circ R)$

ג. הוכח ע"י דוגמא נגדית שהטענה $(S \cap W) \circ R = (S \circ R) \cap (W \circ R)$ אינה נכונה.

4. יהי E יחס שקילות על קבוצה A , ויהי F יחס שקילות על קבוצה B . תהי

$$G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$$

הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.

5. A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A . הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R \cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.

ג. $(A \times A) \setminus R \cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.

ה. $R \circ R$ יחס שקילות.

ו. $R \circ S$ יחס שקילות.

I_A זהו יחס הזהות, לדוגמא אם $A = \{1, 2, 3\}$ אז $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

6. תהי A קבוצה סופיות כך ש- $|A| = 9$.

א. כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A ?

ב. כמה יחסי שקילות מעל A מקיימים את התנאי הבא: "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3

איברים בדיוק"? (רמז: חשבו על הקשר בין יחסי שקילות לחלוקות.)

בהצלחה!