תרגול מס' 7 במבנים אלגבריים 1

תמונה וגרעין של הומומורפיזם

<u>תזכורת</u>: עבור הומומורפיזם של חבורות $f:G_1\to G_2$ מתקיים:

1. $\mathrm{Im}(f)\le G_2$, $\ker(f)\lhd G_1$.
2. משפט האיזומורפיזם הראשון: $G_1/\ker(f)\cong \mathrm{Im}(f)$.

<u>מסקנה</u>: $\ker(f)=\{e_{G_1}\}\ \Leftrightarrow\ G_1\cong \mathrm{Im}(f)$.

דוגמאות:

1. נגדיר אפימורפיזם: $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$, $a\mapsto \bar{a}=a+n\mathbb{Z}$.

זהו הומומורפיזם: $\forall a,b\in\mathbb{Z}:\ f(a+b)=\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$. הגרעין הוא: $\ker(f)=n\mathbb{Z}$.

חבורת המנה: $\mathbb{Z}/\ker(f)=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{a+n\mathbb{Z}\ :\ a\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}_n$. ואכן: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_n$.

2. נתבונן באפימורפיזם: $f:\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})\to(\mathbb{R}^\times,\cdot)$ המוגדר ע"י: $f(A)=\det(A)$.

זהו אכן הומומורפיזם: $f(A\cdot B)=\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ וברור שהוא על.

הגרעין שלו הוא: $\ker(f)=\{A\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}):\det(A)=1\}=\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$.

מכאן נוכל להסיק כי: $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})\lhd\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ וכי: $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^\times$.

אכן אם נתבונן בחבורת המנה: $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})=\{A\cdot\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})\}$ נוכל לשים לב כי שתי מטריצות $A,B\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ הן שקולות מודולו $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ - אם"ם יש להן את אותה דטרמיננטה. כלומר כל קוסט מאופין באיזשהו מספר ממשי שונה מאפס.

3. הוכח כי: $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{T}$ באשר $\mathbb{T}$ הוא מעגל היחידה עם כפל.

<u>פתרון</u>: נתבונן באפימורפיזם: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{T}$ הנתון ע"י: $x \mapsto cis(2\pi x)$.

הוא משמר פעולה: $f(x+y) = cis(2\pi(x+y)) = cis(2\pi x)\cdot cis(2\pi y) = f(x)\cdot f(y)$.

נקבל: $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R} : cis(2\pi x) = 1\} = \mathbb{Z}$. שימו לב כי: $f(\mathbb{Q}) = \Omega_\infty$ ולכן: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq \Omega_\infty$.

4. הישר: $H = \{(x,3x) : x \in \mathbb{R}\}$ הוא תח"נ במישור $G = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

ע"י ההעתקה: $\varphi : G \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y - 3x$ עם: $\ker(\varphi) = H$ ניתן לראות עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון כי: $G/H \simeq \mathbb{R}$. אומרים כי H משוכנת אלכסונית בתוך $\mathbb{R}^2$.

המשמעות הגיאומטרית היא שהמישור מתקבל ע"י אוסף אינסופי של הזזות מקבילות של הישר.

5. כיוון ש: $\langle a \rangle \triangleleft D_n = \langle a, b \mid a^n = e, b^2 = e, ab = ba^{n-1} \rangle$ נגדיר אפימורפיזם שזהו גרעינו:

$f : D_n \to D_n/\langle a \rangle,\ x \mapsto x\langle a \rangle$ (הומומורפיזם המנה). תכונת ההומומורפיזם נובעת מהנורמליות של $\langle a \rangle$:

$$\forall x, y \in D_n : f(xy) = xy\langle a \rangle = x\langle a \rangle y\langle a \rangle = f(x)\cdot f(y).$$

חבורת המנה המתקבלת היא: $D_n/C_n \simeq \mathbb{Z}_2$.

תרגיל: תהיינה שתי חבורות G_1, G_2 מסדרים זרים. כמה הומומורפיזמים שונים קיימים ביניהן ?

פתרון:

עפ"י משפט איזו' 1: $G_1/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f) \quad \Leftarrow \quad \frac{|G_1|}{|\ker(f)|} = |\mathrm{Im}(f)| \quad \Leftarrow \quad |\mathrm{Im}(f)| \mid |G_1|$

כמו כן: $\mathrm{Im}(f) \le G_2 \quad \Leftarrow \quad |\mathrm{Im}(f)| \mid |G_2|$. אבל: $(|G_1|, |G_2|) = 1$ לכן: $|\mathrm{Im}(f)| = 1$ כלומר ההומומורפיזם הטריוויאלי הוא היחיד.

תרגיל: הוכח או הפרך:

א. קיים איזו': $\mathbb{R}^* \to \left(\mathbb{R}^+ \times \Omega_2 , \bullet\right)$.

ב. קיימים $m,n>1$ כך שקיים אפי': $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$.

ג. קיים מונו': $\left(\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q}),\bullet\right) \to \left(\mathbb{Q}^{10},+\right)$.

ד. קיים איזו': $\left(\mathbb{Q}^+ , \bullet\right) \simeq (\mathbb{Q},+)$.

פתרון:

א. נגדיר: $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+ \times \Omega_2 \quad x \mapsto \left(|x|, sign(x)\right)$. נבדוק הומומורפיזם:

$x,y \in \mathbb{R}^+ : \ f(xy) = \left(|xy|, sign(xy)\right) = \left(|x|\cdot|y|, sign(x)\cdot sign(y)\right) = f(x)\cdot f(y)$.

נבדוק חח"ע: $\ker(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) = (1,1)\right\} = \{1\} = \{e_\bullet\}$ ולכן חח"ע. נבדוק על:

$\forall(t,1), t\in\mathbb{R}^+ : \ f(t) = (t,1), \quad \forall(t,-1), t\in\mathbb{R}^+ : f(-t) = (t,-1)$ לכן על ובסה"כ איזומורפיזם.

ב. הטענה איננה נכונה: $\mathbb{Z}_m$ היא חבורה ציקלית ולכן כל תמונה הומומורפית שלה תהיה בהכרח חבורה ציקלית ולכן לא יכולה להיות $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ שאינה חבורה ציקלית (עבור $n>1$).

ג. הטענה איננה נכונה, שכן $\mathbb{Q}^{10}$ קומוטטיבי, ואם היה קיים מונומורפיזם מ-$\mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$, שהיא חבורה לא אבלית, אז היינו מקבלים תת-חבורה לא אבלית בחבורת התמונה.

ד. הפרכה: נניח בשלילה כי קיים איזומורפיזם: $f:\left(\mathbb{Q}^+ , \bullet\right) \to (\mathbb{Q},+)$ ונסמן: $f(5) = c \in \mathbb{Q}$.

מכאן שגם: $\frac{c}{2} \in \mathbb{Q}$. f היא על לכן: $\exists x \in \mathbb{Q}^+ : f(x) = \frac{c}{2}$.

כיוון ש f הומומורפיזם: $f(x\cdot x) = f(x) + f(x) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c = f(5)$.

אבל f חח"ע לכן: $x^2 = 5$ בסתירה לכך ש: $x \in \mathbb{Q}$.

תרגיל: יהא הומומורפיזם: $f:(\mathbb{Z}_{15},+) \to (\mathbb{Z}_{12},+)$.

א. הוכח: $|\mathrm{Im}(f)| \in \{1,3\}$.

ב. האם f היא חח"ע ? על ?

ג. יהא $K=\ker(f)$ ונניח: $K\neq\mathbb{Z}_{15}$. לאיזו חבורה איזומורפי: $\mathbb{Z}_{15}/K$?

__פתרון:__

א. $|\ker(f)|\mid 15 \to |\ker(f)|=\{1,3,5,15\}$

כמו כן: $\frac{|\mathbb{Z}_{15}|}{\underbrace{|\ker(f)|}_{\in\{1,3,5,15\}}}=\{1,3\} \;\Rightarrow\; \mathbb{Z}_{15}/\ker(f)\cong \operatorname{Im}(f)|\,12$.

ב. f לא חח"ע שכן: $|\operatorname{Im}(f)|=15 \;\Rightarrow\; |\ker(f)|=1 \;\Rightarrow\; \ker(f)=\{e\}$ והרי $|\operatorname{Im}(f)|\,|12$.

כמו כן f לא יכולה להיות על שכן הוכחנו ב-א' שהתמונה היא תת-חבורה ממש בטווח.

ג. $|\ker(f)|\neq 15 \;\Leftarrow\; |\ker(f)|=5 \;\Leftarrow\; |\mathbb{Z}_{15}/\ker(f)|=3 \;\Leftarrow\; \mathbb{Z}_{15}/K\cong\mathbb{Z}_3$.

תת-חבורות נורמליות

__הוכח או הפרך:__ $K\lhd H\lhd G \;\Leftarrow\; K\lhd G$.

__הפרכה:__ נורמליות אינה תכונה טרנזיטיבית ! למשל בתוך $D_4=\langle a,b\rangle$ נסמן:

$K=\{e,ba\}\le H=\{e,ba,a^2,ba^3\}$ ($K=V_4$ היא חבורת האיזומטריה של מלבן שאינו ריבוע ונקראת חבורת קליין). אזי למרות ש: $K\lhd H\lhd D_4$ (שני האינדקסים שווים ל-2), עדיין: $K\ntriangleleft D_4$ שכן:

$$bK=\{b,b^2a=a\}\neq Kb=\{b,bab=b^2a^3=a^3\}.$$

__תרגיל:__ תהא G חבורה ו-$H\le G$, $N\lhd G$ תתי-חבורות. הוכח: $N\cap H\lhd H$.

__פתרון:__ נסמן: $L=N\cap H$. צ"ל: $\forall h\in H,\forall l\in L:\ hlh^{-1}\in L$.

אכן: $hlh^{-1}\in N \;\Leftarrow\; \forall g\in G: glg^{-1}\in N \;\Leftarrow\; \begin{cases} l\in N\\ N\lhd G\end{cases}$.

כמו כן: $hlh^{-1}\in H$ $l\in H\le G$ ומכאן: $hlh^{-1}\in L=N\cap H$.