# אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 5

18 בנובמבר 2020

1. מצאו את הגבולות של הסדרות המרוכבות הבאות:

(א) $z_n = (0.5\text{cis}\frac{\pi}{6})^{2n}$

(ב) $z_n = (1-\frac{1}{n})^n\text{cis}\frac{\pi}{4}$

(ג) $z_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} - 2\cdot\sqrt[n]{n}i$

(ד) $z_n = \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i\right)^n$

(ה) $z_n = \frac{\sin 2n+2\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{3n}-5}{2\sqrt{n}+17\sqrt[4]{n}}i$

**פתרון:**

א. נקבל את הסדרה $z_n = (0.5)^{2n}\text{cis}\frac{2\pi n}{6}$. ראינו שכיון שסדרת הנורמות $r_n = (0.5)^{2n} \to 0$ אז מתקיים $z_n \to 0$.

ב. הגבול הוא: $\frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$. הוכחה: יש כאן קבוע, $\text{cis}\frac{\pi}{4}$, כפול הסדרה $(1-\frac{1}{n})^n$, וראינו שזה הקבוע כפול גבול הסדרה. ניזכר בקורס הקודם שמתקיים: $(1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$, ולכן בסה"כ נקבל:

$$z_n \to \frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

ג. כאן נפתור לפי מה שראיתם בהרצאה שהסדרה $z_n = a_n + b_n i$ מתכנסת אם ורק אם הסדרות $a_n, b_n$ מתכנסות. ואכן מתקיים: $a_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} \to \frac{2}{8} = 0.25$, וכן $b_n = -2\cdot\sqrt[n]{n} \to -2$, ולכן בסה"כ:

$$z_n \to 0.25 - 2i$$

ד. כאן מספיק להראות שסדרת הנורמות שואפת לאפס. ואכן: $|z_n| = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n \to 0$, ולכן $z_n \to 0$.

ה. נבדוק התכנסות רכיב רכיב. ברכיב הממשי נרשום: $a_n = (\sin 2n + 2\cos n)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$. זו חסומה כפול אפיסה ולכן $a_n \to 0$. ברכיב המדומה: הסדרה

היא: $b_n = -\frac{\sqrt{3n}-5}{2\sqrt{n}+17\sqrt[4]{n}}$, החלק הדומיננטי זה כמובן $\sqrt{n}$, ולכן הגבול הוא מנת המקדמים: $b_n \to -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ובסה"כ: $z_n \to -\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות, והוכיחו שהן רציפות בתחום ההגדרה:

(א) $f(z) = \frac{z^3-5z^2+i}{z^3+8i}$.

(ב) $f(x+yi) = (x\text{cis}y)(y\text{cis}x)$.

(ג) $f(z) = Im(\overline{z}) \cdot Re(z) + z\overline{z}i$.

(ד) $f(x+yi) = (x\text{cis}y)(x\text{cis}(-y))$.

(ה) $f(x+yi) = e^x\text{cis}y$.

**<u>פתרון:</u>**

א. זו מנה של פולינומים. נמצא מתי המכנה מתאפס:

$$z^3 + 8i = 0 \iff z^3 = -8i = 8\text{cis}270$$

ולכן נקבל:

$$z_k = 2\text{cis}(90 + 120k), k \in \{0, 1, 2\}$$

כלומר, יש 3 נקודות לא מוגדרות. בשאר היא רציפה כמנה של פולינומים.

ב. נחלק לממשי ומדומה: $f(x+yi) = xy\text{cis}(x+y) = xy\cos(x+y) + ixy\sin(x+y)$, כלומר,

$$U(x,y) = xy\cos(x+y)$$

$$V(x,y) = xy\sin(x+y)$$

שתיהן רציפות, ולכן $f$ רציפה.

ג. יש כאן סכום, כפל והרכבה של רציפות, אז רציפה (ההרכבה: $Im(\overline{z})$).

ד. נקבל: $f(x+yi) = x^2\text{cis}0 = x^2$ שהיא כמובן רציפה.

ה. נחלק לממשי ומדומה: $f(x+yi) = e^x\cos y + ie^x\sin y$. כלומר:

$$U(x,y) = e^x\cos y$$

$$V(x,y) = e^x\sin y$$

שתיהן רציפות ולכן $f$ רציפה.

בהצלחה!