<u>פתרון תרגיל בית 6 , גיאומטריה אנליטית ואוקלידית, מתרגלת: זהבית צבי</u>

סווגו את התבניות הריבועיות הבאות ומצאו להן צורה קנונית:

1. $2x^2+y^2+3y=0$
2. $4x^2+y^2+6x-12y-10=0$
3. $4x^2+y^2+6x-12y+\frac{113}{4}=0$
4. $4x^2+4y^2+6x-12y+10=0$
5. $6x^2+12y-10=0$
6. $4x^2+y^2-40x+6y+93=0$

<u>הערה חשובה:</u> בתרגילים אלו המטריצה A הינה אלכסונית ולכן מקבלים ש- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. למעשה ניתן מיד לעשות השלמה לריבוע אך לפי דרישת המרצה נמשיך להציב בתבנית לצורך הכנה לתרגיל 7.

<u>פתרון</u>

1. המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}=0 \quad (*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם: $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$2x'^2+y'^2+3y'=0$$

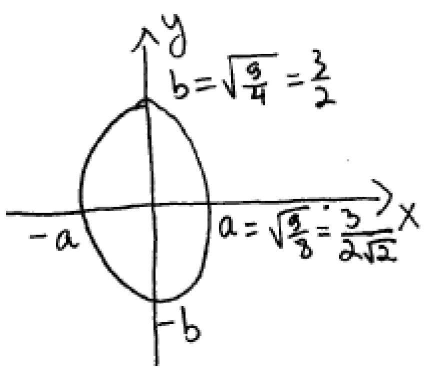
נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$:

$$2x'^2+y'^2+3y'=0\,(:2)\Rightarrow x'^2+\underbrace{\frac{1}{2}y'^2}_{u=\frac{1}{\sqrt{2}}y'}+\underbrace{\frac{3}{2}y'}_{2\underbrace{u}_{\frac{1}{\sqrt{2}}y}v=\frac{3}{2}y'\ \Rightarrow v=\frac{3}{2\sqrt{2}}}+\underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{v^2}=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2\Rightarrow x'^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$$

$$x'^2+\frac{1}{2}\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{8}\left(:\frac{9}{8}\right)\Rightarrow\frac{x'^2}{\frac{9}{8}}+\frac{1}{2}\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{8}}=1\Rightarrow\frac{x'^2}{\frac{9}{8}}+\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=1$$

נכתוב בצורה קנונית : $\tilde{x}=x'\,,\,\tilde{y}=y'+\frac{3}{2}$ ונקבל : $\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$, כאשר $a^2=\frac{9}{8}\,,\,b^2=\frac{9}{4}$. זו אליפסה.

<u>איור :</u>



2. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא : $A=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך : $\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}6&-12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-10=0\quad(*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם : $\lambda_1=4,\lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים :

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא : $\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל :

$$\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&-12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-10=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+y'^2+6x'-12y'-10=0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר :

$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2\,,\,(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$

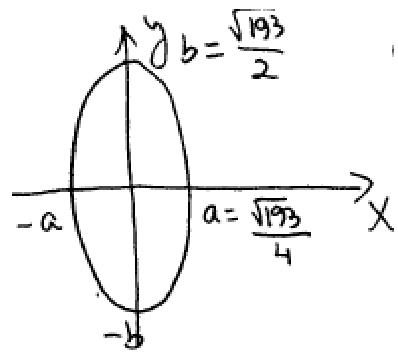
$$\underline{4x'^2} + \underline{\underline{y'^2}} + \underline{6x'} - \underline{\underline{12y'}} - 10 = 0 \Rightarrow \underbrace{\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2 + 2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}}_{v} + \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}\right)^2\right\}}_{(u+v)^2} + \underbrace{\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^2 - 2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{6}_{v}+\underbrace{6}_{v}^2\right\}}_{(u-v)^2} - 10 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2x'+\frac{3}{2}\right)^2 + (y'-6)^2 = 10+\frac{9}{4}+36 = \frac{193}{4} \Rightarrow \left[2\left(x+\frac{3}{4}\right)\right]^2 + (y-6)^2 = \frac{193}{4}$$

$$\Rightarrow 4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+(y'-6)^2 = \frac{193}{4}\left(:\frac{193}{4}\right) \Rightarrow \frac{\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2}{\underbrace{\frac{193}{16}}_{a^2}} + \frac{(y'-6)^2}{\underbrace{\frac{193}{4}}_{b^2}} = 1$$

נכתוב בצורה קנונית: $\tilde{x} = x'+\frac{3}{4}$, $\tilde{y} = y'-6$ ונקבל: $\frac{\tilde{x}^2}{\underbrace{\frac{193}{16}}_{a^2}}+\frac{\tilde{y}^2}{\underbrace{\frac{193}{4}}_{b^2}}=1$. זו צורה קנונית של אליפסה.

<u>איור:</u>



3. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $(*)$ $\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}6 & -12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\frac{113}{4}=0$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1=4, \lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -12 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\frac{113}{4}=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+y'^2+6x'-12y'+\frac{113}{4}=0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$, $(u-v)^2=u^2-2uv+v^2$

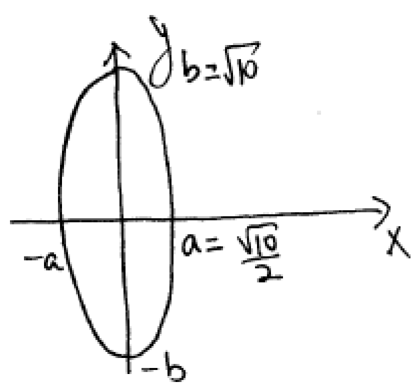
$$\underline{4x'^2}+\underline{\underline{y'^2}}+\underline{6x'}-\underline{\underline{12y'}}+\frac{113}{4}=0\Rightarrow\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}\right)^2\right\}}_{(u+v)^2}+\underbrace{\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{6}_{v}+\underbrace{6}_{v}^2\right\}}_{(u-v)^2}+\frac{113}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2-6^2=0$$

$$\Rightarrow\left(2x'+\frac{3}{2}\right)^2+(y'-6)^2=-\frac{113}{4}+\frac{9}{4}+36=10\Rightarrow\left[2\left(x'+\frac{3}{4}\right)\right]^2+(y'-6)^2=10$$

$$\Rightarrow 4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+(y'-6)^2=10\ (:10)\Rightarrow\frac{\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2}{\underbrace{\frac{10}{4}}_{a^2}}+\frac{(y'-6)^2}{\underbrace{10}_{b^2}}=1$$

נכתוב בצורה קנונית: $\tilde{x}=x'+\frac{3}{4}$, $\tilde{y}=y'-6$ ונקבל: $\frac{\tilde{x}^2}{\underbrace{\frac{10}{4}}_{a^2}}+\frac{\tilde{y}^2}{\underbrace{10}_{b^2}}=1$. זו אליפסה.

<u>איור:</u>



4. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} 6 & -12 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+10=0\quad(*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. אנו רואים כי $\lambda_1=\lambda_2=4$, לכן $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1=\lambda_2$ ולכן אנו יודעים שצריך

לקבל מעגל. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow(x\quad y)=(x'\quad y')$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$(x'\quad y')\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(6\quad -12)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+10=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+4y'^2+6x'-12y'+10=0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2\ ,\ (u-v)^2=u^2-2uv+v^2$$

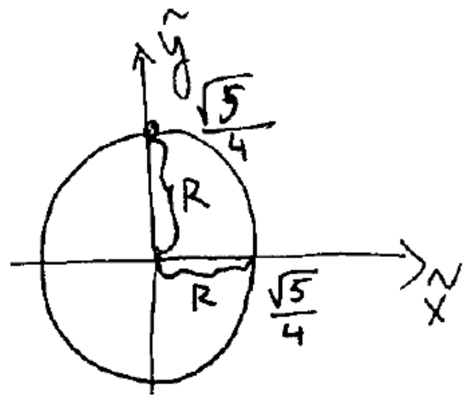
$$\underline{4x'^2}+\underline{\underline{4y'^2}}+\underline{6x'}-\underline{\underline{12y'}}+10=0\Rightarrow\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}\right)^2\right\}}_{(u-v)^2}+\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{2y'}_{u}\cdot\underbrace{3}_{v}+\underbrace{3}_{v}^2\right\}}_{(u-v)^2}+10-\left(\frac{3}{2}\right)^2-3^2=0$$

$$\Rightarrow\left(2x'+\frac{3}{2}\right)^2+(2y'-3)^2=-10+\frac{9}{4}+9=\frac{5}{4}\Rightarrow\left[2\left(x'+\frac{3}{4}\right)\right]^2+\left[2\left(y'-\frac{3}{2}\right)\right]^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+4\left(y'-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(:4)\Rightarrow\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y'-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

נכתוב בצורה קנונית: $\tilde{x}=x'+\frac{3}{4}$, $\tilde{y}=y-\frac{3}{2}$ ונקבל: $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=\frac{5}{16}$. זה מעגל שעבורו $R^2=\frac{5}{16}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

<u>איור:</u>



5. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{(x\quad y)}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+(0\quad 12)\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-10=0$ (*)

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2 = 0$ ו- $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, לכן זו פרבולה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^t AP = I^t AI = IAI = A = D$.

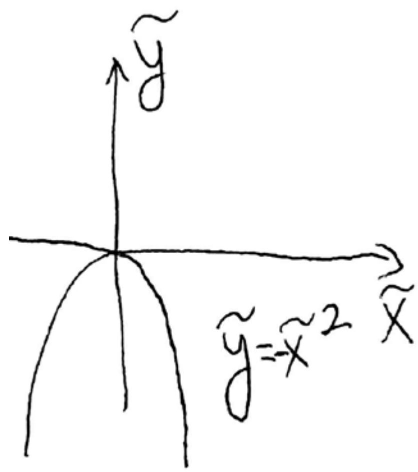
החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{I}{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P = I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$6x'^2 + 12y' - 10 = 0 \Rightarrow y' = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x'^2$$

נכתוב בצורה קנונית: $\tilde{y} = y'$, $-\tilde{x}^2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x'^2$ ונקבל: $\tilde{y} = -\tilde{x}^2$ זו פרבולה רגילה.

<u>איור:</u>



6. המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $(*)$ $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \begin{pmatrix} -40 & 6 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + 93 = 0$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2 > 0$ ו- $\lambda_1 \neq \lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^t AP = I^t AI = IAI = A = D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{I}{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P = I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -40 & 6 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+93=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+y'^2-40x'+6y'+93=0$$

נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$:

$$\underline{4x'^2}\underline{\underline{+y'^2}}\underline{-40x'}\underline{\underline{+6y'}}+93=0\Rightarrow\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{10}_{v}+\underbrace{10}_{v}^2\right\}+\left\{\underbrace{y'}_{u}^2+2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{3}_{v}+\underbrace{3}_{v}^2\right\}+93-100-9=0\Rightarrow$$

$$(2x'-10)^2+(y'+3)^2=16\Rightarrow\left(2(x'-5)\right)^2+(y'+3)^2=16\Rightarrow 4(x'-5)^2+(y'+3)^2=16\;(:16)$$

$$\Rightarrow\frac{(x'-5)^2}{4}+\frac{(y'+3)^2}{16}=1$$

נכתוב בצורה קנונית : $\tilde{x}=x'-5\,,\,\tilde{y}=y'+3$ ונקבל : $\frac{\tilde{x}^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}=1$, כאשר $a^2=4\,,\,b^2=16$. קיבלנו אליפסה.

<u>איור :</u>