שאלות פתוחות תרגיל בית 3

1. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי a_n מונוטונית יורדת לבסוף (כלומר a_n מונוטונונית יורדת החל משלב מסוים בסדרה).
פתרון: לא נכון. ניקח

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = 2k \\ \frac{2}{n} & n = 2k-1 \end{cases}$$

2. (א) תהינה a_n ו b_n סדרות מונוטוניות עולות וחסומות המקיימות את התכונה הבאה:

$$\forall n \exists N \quad a_n \leq b_N$$

$$\forall n \exists N \quad b_n \leq a_N$$

לכל איבר של a_n יש איבר של b_n שגדול שווה ממנו וכן להפך, לכל איבר של b_n יש איבר של a_n שגדול שווה ממנו. הוכיחו כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

פתרון: נניח בשלילה ש

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b$$

כאשר $a \neq b$. בלי הגבלת כלליות, נניח $a > b$. אז ברור שקיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו

$$a_n > b$$

כמו כן לפי הנתון, יש n_0 כלשהוא עבורו

$$b_{n_0} > a_n$$

אבל הגבול של b_n הוא החסם העליון של הסדרה. בפרט

$$b_{n_0} \leq b$$

כלומר בסך הכל קיבלנו

$$b < a_n < b_{n_0} \leq b$$

בסתירה.

(ב) הראו כי הטענה לא נכונה אם a_n ו b_n הן שתי סדרות מתכנסות בעלות התכונה הנ"ל (אבל לא בהכרח מונוטוניות).

פתרון: ניקח

$$a_n = 2, 1, 1, 1, \ldots$$

$$b_n = 2, 0, 0, 0, 0, \ldots$$