תרגיל: תהי $f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$

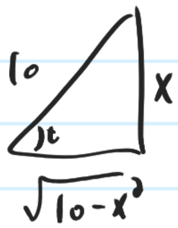
חשבו $f^{(48)}\left(\frac{1}{2}\right)$

לא לגזור. כנראה טור טיילור.

תרגיל: $\Leftarrow$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\arctan\left(t^6\right)dt}{x^{21}}$$

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\left(F(x^3)-F(0)\right)'}{21x^{20}} = \frac{\arctan\left(x^{18}\right)\cdot 3x^2}{21x^{20}}$$

$$\int\sqrt{10-x^2}\,dx$$



$$\sin t=\frac{x}{10}$$

$$\int\sin^3x\,dx=\int\sin^2x\sin x=\int\left(1-\cos^2x\right)\sin x$$

הצבה: $=\int\left(1-t^2\right)$ בפרקש

תהי f פונק' רציפה בממשיים כך שלכל x $f(x+2\pi)=f(x)$

א. $$h(x)=\int_{-\pi+x}^{\pi+x}f(t)\,dt$$

הוכח: $h'(x)=0$ לכל x (ולכן h קבועה)

$h(x)=C$ לכל x.

ד. $h(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = h(a)$

מכאן k , h פונקציה קבועה.

$$h(0)=\int_{-\pi+0}^{\pi+0} f(x)\,dx = C = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = h(a)$$

<u>שאלה:</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

לא אינטגרבילית כי היא לא חסומה.

תנאי <u>לאינטגרביליות</u>: <u>חסומה</u>, <u>ורציפה</u> פרט למס'

בן מניה של נק'.

<u>הגדרה:</u>

$$\int_{b}^{a} f(x) = -\int_{a}^{b} f(x)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x) = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{a} = \int_{-a}^{0} - \int_{a}^{0}$$

כיוון ש $f(x)$ אי-זוגית כך $-f(-x)=f(x)$

נקבל 0.

נק' ימנית $[a,b]$

$$a + \frac{(b-a)}{n} \cdot k$$

נק' שמאלית:

$$a + \frac{(b-a)}{n}(k-1)$$

$$\cancel{\int \frac{1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}\, dx}$$

$$\cancel{t = \sqrt{x}}$$

$$\cancel{t^2 = x \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{t^2-1}}$$

$$\cancel{dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2t}\, dx}$$

$$\cancel{= \int \frac{2t\, dt}{\sqrt{t^2-1} - t}}$$

כפל בצמוד.

$$\int \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}{-1}\, dx$$

תהי f פונק' המקיימת

$$f(x) = \left(x = \frac{p}{q}\right) f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q}{p+q}$$

כאשר $x \neq -1$

א. האם f אינטגרבילית רימן בקטע $[-1,0]$ (תשובה: לא)

ב. נמק כי f אינטגרבילית רימן בקטע $[0,1]$

חשבו $\int_0^1 f(x)\, dx$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{1}{\frac{p}{q}+1}\right) = \frac{q}{p+q}$$

ב)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \in \mathbb{Q} \\ ? & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

כיוון ש-f אינטגרבילית כל סכום רימן מתכנס לאינ'

ולכן אם נבחר נק' דגימה רציונליות אזי

$$\int_0^1 f(x) = \boxed{\text{סכום רימן של } \frac{1}{1-x} \text{ רציונלי זהה}} = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

$0, \pm 1 : a_i \le 3$ אילו פולינומים.

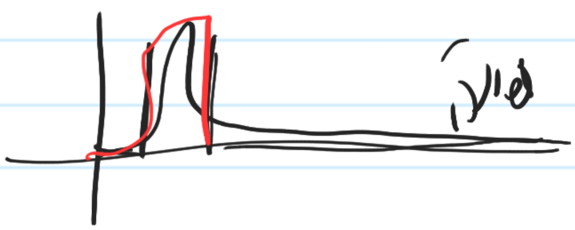
$$\forall g:[a,b]\to\mathbb{R} : \int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

<u>ראשית</u> f רציפה ב-$[a,b]$. הוכיחו כי f קבועה.

<u>אסטרטגיה:</u> נניח f לא קבועה $f(0) > f(1)$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 1/2 \\ -1 & x > 1/2 \end{cases}$$

?

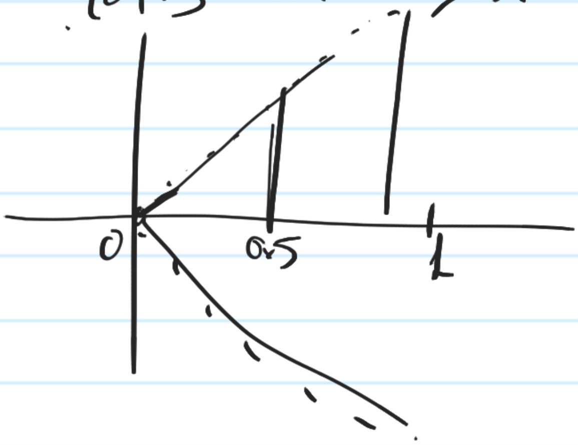


צריך לבנות איזשהו שיפוע

מדרגה.. כנראה.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכח שהיא אינה אינטגרבילית ב- $[0,1]$



$$\overline{S}(f,T) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, f(c_i)$$

c_i נק' ימנית רציונלי

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \Delta x_i$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ולכן סכום עליון לפחות $1/4$ ובאופן דומה סכום תחתון הוא לכל היותר $-1/4$.

$f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$

הוכיחו לפי הגדרה כי $cf(x)$ אינטגרבילית

$$\int cf(x) = c \int f(x)$$ ומתקיים

$n=1$

$$\int e^x = e^x + C$$

$$I_n = \int x^n e^x = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, dx$$

$x^n = u$

$e^x = v'$

$$x^n e^x - n I_{n-1}$$
