אלגברה לינארית 2 תרגול 5

21 באפריל 2021

1 שילוש

1. משפט: אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה עם פ"א המתפרק לגורמים לינארים (= מל"ל) אז A ניתנת לשילוש. כלומר, קיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP$ משולשית עליונה.

2. תרגיל: הראו שהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

ניתנת לשילוש, ושלשו אותה. נחשב את הפולינום האופייני:

$$P_A(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & x-1 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & x-9 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & x+3 \end{vmatrix} =$$

נוסיף לשורה הראשונה את שלושת השורות שאחריה (כלומר, $R_1 + R_i \to R_1 \forall i > 1$) ונקבל

$$= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 & x-1 \\ -1 & x-1 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & x-9 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & x-9 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\forall i>1: C_i - C_1 \to C_i} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 2 & 4 \\ -2 & -3 & x-7 & -10 \\ 1 & 1 & 2 & x+2 \end{vmatrix}$$

כעת, פיתוח לפי שורה ראשונה ייתן לנו:

$$=(x-1)\begin{vmatrix} x & 2 & 4 \\ -3 & x-7 & -10 \\ 1 & 2 & x+2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3-2C_2\to C_3} =(x-1)\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ -3 & x-7 & -2x+4 \\ 1 & 2 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-1)\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ -3 & x-7 & -2(x-2) \\ 1 & 2 & x-2 \end{vmatrix}$$

כעת ניתן להוציא את $x-2$ מהעמודה השלישית ולקבל:

$$=(x-1)(x-2)\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ -3 & x-7 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_3\to R_2} =(x-1)(x-2)\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ -1 & x-3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שלישית ונקבל:

$$=(x-1)(x-2)\cdot(x(x-3)+2)=(x-1)(x-2)(x^2-3x+2)=(x-1)^2(x-2)^2$$

הפ"א מל"ל, ולכן A ניתנת לשילוש.

כדי לשלש צריך תחילה למצוא הכי הרבה ו"ע בת"ל:

$$V_1=N\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdots = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2=N\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -5 & -7 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \cdots = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ניתן לראות שהמטריצה לא ניתנת ללכסון, כי עבור שני הע"ע ר"ג קטן מר"א. ניקח בסיס המורכב משני הו"ע שמצאנו, ונשלים עם וקטורי יחידה:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3, e_4\right\}$$

ונגדיר את המטריצה P להיות זו שוקטורי הבסיס בעמודותיה:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב ונקבל:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

כעת, נותר לטפל בחלק הימני התחתון ולשלש את $C = \begin{pmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$. נחשב פ"א של C:

$$P_C(x) = \begin{vmatrix} x+0.5 & 2.5 \\ -1.5 & x-3.5 \end{vmatrix} = (x+0.5)(x-3.5)+2.5\cdot 1.5 = x^2-3x-1.75+3.75 = (x-1)(x-2)$$

נמצא וקטורים עצמיים:

$$V_1 = N\begin{pmatrix} 1.5 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2 = N\begin{pmatrix} 2.5 & 2.5 \\ -1.5 & -1.5 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן נקבל שעבור $Q = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ מתקיים:

$$Q^{-1}CQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת כדי לשלש את Aנעשה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & Q^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. האלגוריתם האינדוקטיבי: תהא A עם פ"א מל"ל, נבצע את השלבים הבאים:

(א) לכל ע"ע נמצא בסיס למ"ע שלו. בסה"כ נקבל $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$ ו"ע בת"ל.

(ב) נשלים לבסיס של $\mathbb{F}^n$ $B'=\{v_1,\ldots,v_k,u_{k+1},u_n\}$ ונגדיר את P להיות המטריצה שעמודותיה הם וקטורי B'. נקבל:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \lambda_k & * \\ 0 & \cdots & 0 & C\end{pmatrix}$$

(ג) מהנחתץ האינדוקציה ניתן לשלש את C בעזרת Q ואז נסמן $\widetilde{Q}=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & Q\end{pmatrix}$ ונקבל שהמטריצה

$$\widetilde{Q}^{-1}P^{-1}AP\widetilde{Q}=\left(P\widetilde{Q}\right)^{-1}A\left(P\widetilde{Q}\right)$$

היא משולשית.

4. תהא $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ המקיימת: $tr(A)=0,\det(A)=-1$ ובנוסף, A^2+I לא הפיכה. חשבו את A^{100}.

פתרון: נחשוב רגע כאילו המטריצה מעל המרוכבים, ותוך כדי נשמור בראש שבאמת היא מעל הממשיים: כיון ש־

$$A^2+I=(A-iI)(A+iI)$$

לא הפיכה, זאת אומרת שאחת מהן (לפחות) לא הפיכה, ולכן, אם למשל $(A-iI)$ לא הפיכה, אז i ע"ע של A (כי: חוסר הפיכות אומר שיש וקטור $v\neq 0$ שהוא פתרון של ההומוגנית, כלומר: $(A-iI)v=0$ ולכן אחרי העברת אגפים נקבל $Av=iv$ ולכן i ע"ע).

משפט: אם $p(x)$ פולינום שכל המקדמים ממשיים. כלומר $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ כך ש־ $\forall i: a_i\in\mathbb{R}$. אז: אם z שורש של הפולינום אז גם $\overline{z}$ שורש של הפולינום.

כיון שהמטריצה מעל $\mathbb{R}$ אז מקדמי הפ"א ממשיים, ולכן מתקיים: אם $z\in\mathbb{C}$ ע"ע (כאשר מסתכלים עליה כמטריצה מרוכבת) אז גם $\overline{z}$ ע"ע. כי אם z שורש של פולינום עם מקדמים ממשיים, אז גם $\overline{z}$ שורש של הפולינום. בסה"כ מקבלים ש־ $\pm i$ ע"ע של A. בינתיים קיבלנו:

$$P_A(x)=(x-i)(x+i)(x^2+bx+c)$$

נמשיך וניעזר בשני הנתונים הנוספים. הדטרמיננטה של A זה מכפלת ע"ע, והעקבה זה סכום ע"ע. לכן, נסמן את שני הע"ע הנותרים ב־ x, y נקבל:

$$\begin{cases} 0 = x + y + i + (-i) = x + y \\ -1 = xy \cdot i \cdot (-i) = xy \end{cases}$$

בשיטת ההצבה למשל נקבל:

$$-1 = -x^2 \Rightarrow x = \pm 1, y = \mp 1$$

בסה"כ הע"ע מעל המרוכבים הם: $1, -1, i, -i$.
כיון שיש 4 ע"ע שונים, נקבל שהיא לכסינה מעל $\mathbb{C}$. נסמן את המלכסנת ב־P, ונקבל:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix} P^{-1}$$

נסמן $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$, ונקבל:

$$A^{100} = \left(PDP^{-1}\right) \cdot \left(PDP^{-1}\right) \cdots \left(PDP^{-1}\right) =$$

$$= PD^{100}P^{-1} = P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}^{100}}_{=I} P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

5. מטריצה נלווית.

(א) חשבו מטריצה נלווית של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: מתקיים:

$$adj(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} |M_{j,i}|$$

אצלנו:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -13 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) משפט: $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = |A| \cdot I$. בש"ש תוכיחו: $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.
הוכיחו: אם A הפיכה אז

$$adj(adj(A)) = |A|^{n-2} \cdot A$$

פתרון: נשתמש במשפט עבור המטריצה $B = adj(A)$כלומר, מתקיים:

$$Badj(B) = |B|I$$

ולכן:

$$adj(A) \cdot adj(adj(A)) = |adj(A)| \cdot I$$

כעת לפי השאלה מש"ב נקבל:

$$adj(A) \cdot adj(adj(A)) = |A|^{n-1} I$$

ולכן

$$adj(adj(A)) = (adj(A))^{-1} |A|^{n-1}$$

כעת כיון ש־A הפיכה נקבל $adj(A) = |A| \cdot A^{-1}$, ולכן $adj(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$,
ולכן נקבל:

$$adj(adj(A)) = (adj(A))^{-1} |A|^{n-1} = \frac{1}{|A|} A \cdot |A|^{n-1} = |A|^{n-2} \cdot A$$