לינארית - המשך תתי מרחבים

$\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_i\in\mathbb{R}\}$

תרגיל: $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב מעל $\mathbb{R}$ גודלם

$W=\{p'(x)\mid p(x)\in V\}$ הוא תת מרחב של V?

הוכחה:

1. $W \overset{?}{\in} \vec{O}=p(x)=0+0x+0x^2$. כן, כי קיים

שנגזרת של הפולינום $q(x)=1\in V$

2. יהיו $p(x),q(x)\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$

צ"ל ש- $\alpha p(x)+q(x)\in W$

כיוון ש- $p(x)\in W$ קיים $p_*(x)$ כך ש- $p_*'(x)=p(x)$

$q(x)\in W$ קיים $q_*(x)$ כך ש- $q_*'(x)=q(x)$

לכן $$\underbrace{(\alpha p_*(x)+q_*(x))'}_{\in V}=\alpha p_*'(x)+q_*'(x)=$$

$$=\alpha p(x)+q(x)$$

כלומר $\alpha p(x)+q(x)\in W$

חיתוך תתי מרחבים

יהיו U,W תתי מרחבים של V

אז $U\cap W=\{v \mid v\in U \wedge v\in W\}$

הוא תת מרחב של V.

הערה: $U\cap W$ הוא תת מרחב המקסימלי

שמוכל גם ב- U וגם ב- W.

כלומר כל תת מרחב אחר שמוכל גם ב U,W

מוכל גם כן ב- $U\cap W$

דוגמא: נגדיר $W_1=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x] \mid p(2)=0\}$ ו-

$$W_2=\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x] \mid p(x)=x\cdot p'(x)\}$$

אלו תתי מרחבים $V=\mathbb{R}_2[x]$

מצאו $W_1\cap W_2$

פתרון:

$$W_1=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid \overbrace{a_0+2a_1+4a_2}^{p(2)}=0\}$$

$$W_2=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0+a_1x+a_2x^2=x(a_1+2a_2x)\}=$$

$$=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0-a_2x^2=0\}$$

לכן

$$W_1\cap W_2=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0+2a_1+4a_2=0 \\ a_0-a_2x^2=0 \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0+2a_1+4a_2=0 \\ \begin{cases} a_0=0 \\ a_2=0 \end{cases} \end{array}\right\}$$

$\forall x: a_0-a_2x^2=0$

$x=0;\quad a_0=0$

$x=1;\quad a_2=a_0=0$

$x=2;\quad a_0-4a_2=0$

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0=0 \\ a_2=0 \\ a_0+2a_1+4a_2=0 \end{array}\right\}=$$

$\underline{a_0}-\underline{a_2}x^2=\underline{0}+\underline{0}x^2$

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=$$

מה מרחב וקטורי ניתן לבנות כ-

$W=\{v\in V \mid$ מערכת תשמיע הומוגנית ש $v\}$

$$=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \;\middle|\; a_0=a_1=a_2=0\right\}=\left\{0+0x+0x^2\right\}$$

בחיתוך יוצא כך פולינום ה- $p(x)=0$

תרגיל: $V=\mathbb{C}^{n\times n}$

שריג

$W_1=\{A\in V \mid A \text{ סימטרית}\}$

$W_2=\{A\in V \mid A \text{ אנטי סימטרית}\}$

$W_1 \cap W_2$ קשוון חות

פתרון;

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \forall i,j \quad \overset{n^2}{\downarrow}\ a_{ij} - a_{ji} = 0 & - \text{ סימ'} \\ \forall i,j \quad a_{ij} + a_{ji} = 0 & - \text{ אנטי סימ'} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} = 0 \right\} = 0_{n\times n}$$

תרגיל; $V = \mathbb{F}^{n\times n}$,

$$W_1 = \{ A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה} \} \rightarrow \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \{ A \in V \mid A \text{ משולשית תחתונה} \} \rightarrow \begin{pmatrix} * & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

פתרון;

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \forall i>j \quad a_{ij} = 0 & - \text{ עליונה} \\ \forall i<j \quad a_{ij} = 0 & - \text{ תחתונה} \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{F} \right\} - \text{ אלכסוניות}$$

סכום תתי מרחבים

סכום תתי מרחבים

נרצה לעשות איחוד של תתי מרחבים אלו

$$W_1 \cup W_2 = \{ v \mid v \in W_1 \vee v \in W_2 \}$$ - לא ח"ל להיות תת מרחב

הוכחנו אם $W_1 \not\subseteq W_2$ ו- $W_2 \not\subseteq W_1$

אז יוצא ש- $W_1 \cup W_2$ בהכרח לא תת מרחב.

לכן נגדיר משהו אחר, סכום תתי מרחבים.

הגדרה: יהיו W_1, W_2 תתי מרחבים של V

אז

$$W_1 + W_2 = \{ \underset{\text{וקטור}}{v} + \underset{\text{וקטור}}{u} \mid v \in W_1 , u \in W_2 \}$$

דוגמא: $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ ו- $W_1 = \{ A \in V \mid A \text{ משולשית עליונה} \}$

$$W_2 = \{ A \in V \mid A \text{ משולשית תחתונה} \}$$

אז

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in W_1 + W_2$$

כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v \in W_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{u \in W_2}$$

נוכיח ש- $W_1+W_2=\mathbb{R}^{3\times 3}$

נכתוב. הכלה דו כיוונית

$(\subseteq)$ W_1 תת מרחב של $V=\mathbb{R}^{3\times3}$

W_2 תת מרחב של $V=\mathbb{R}^{3\times3}$

W_1+W_2 גם תת מרחב של $V=\mathbb{R}^{3\times3}$

לכן $W_1+W_2\subseteq V=\mathbb{R}^{3\times3}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & V \arrow[d, dash] & \\
 & W_1+W_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
W_1 \arrow[dr, dash] & & W_2 \arrow[dl, dash] \\
 & W_1\cap W_2 \arrow[d, dash] & \\
 & \emptyset &
\end{tikzcd}$$

$(\supseteq)$ יהי $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in V$ אז

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&e&f\\0&0&i\end{pmatrix}}_{W_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\d&0&0\\g&h&0\end{pmatrix}}_{W_2}\in W_1+W_2$$

סכום ישר הוא סכום שבו $W_1 \cap W_2=\{0\}$

ונסמן $W_1 \oplus W_2$

כלומר אם $W_1 \cap W_2=\{0\}$ אז נאמר ש-

W_1+W_2 הוא סכום ישר ונסמן $W_1 \oplus W_2$

משמעות למקרה של סכום ישר הצירוף

$$W_1 \oplus W_2=\{\underbrace{v+w}_{\downarrow} \mid v\in W_1, w\in W_2\}$$

לו יש צירוף יחיד!!

תרגיל: $V=\mathbb{R}^n$ ו-

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1=a_2=a_3=\dots=a_n\right\}$$

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in V \;\middle|\; a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=0\right\}$$

הוכיחו ש- $W_1 \oplus W_2=V$

הוכחה: מה צריך להוכיח?

1. $W_1 \cap W_2=\{0\}$ - סכום ישר
2. $W_1+W_2=V$

2.1 $W_1+W_2\subseteq V$

2.2 $W_1+W_2\supseteq V$

המשך: ד. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 = \dots = a_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 + \overset{a_2}{\overset{\shortparallel}{a_1}} + \overset{a_3}{\overset{\shortparallel}{a_1}} + \dots + \overset{a_n}{\overset{\shortparallel}{a_1}} = 0 \\ a_1 = a_2 = \dots = a_n \end{matrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} n \cdot a_1 = 0 \\ a_1 = \dots = a_n \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_1 = a_2 = \dots = a_n \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{ \vec{0} \}$$

(2.1) $W_1 + W_2 \subseteq V$

W_1 תת מרחב של V

W_2 תת מרחב של V

לכן $W_1 + W_2$ תת מרחב של V

כלומר $W_1 + W_2 \subseteq V$

(2.2) $W_1 + W_2 \supseteq V$

יהי $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in V$ אז

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\Sigma a_i}{n} \\ \frac{\Sigma a_i}{n} \\ \vdots \\ \frac{\Sigma a_i}{n} \end{pmatrix}}_{\in W_1} + \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \\ \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \\ \vdots \\ \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \end{pmatrix} \\ \in W_1 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_1 - \frac{\sum a_i}{n} \\ a_2 - \frac{\sum a_i}{n} \\ \vdots \\ a_n - \frac{\sum a_i}{n} \end{pmatrix} \\ \in W_2 \end{array}$$

צריך להוכיח

שאכן באמת שייך

ל- W_2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \in W_1 \end{array} + \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \in W_2 \end{array}$$

כאן מוכח נכונות

$$\left(a_1 - \frac{\sum a_i}{n}\right) + \left(a_2 - \frac{\sum a_i}{n}\right) + \dots + \left(a_n - \frac{\sum a_i}{n}\right) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = (a_1 + \dots + a_n) - \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$$

כלומר $\forall$ וקטור $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ניתן להציג כסכום של

וקטור מ- W_1 ווקטור מ- W_2 לכן

$$W_1 + W_2 \supseteq V$$

לכן לסיכום: $W_1 \oplus W_2 = V$

צירופים לינאריים

יהי $v_1,\dots,v_n$ וקטורים ב- V

ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{F}$ סקלרים ב- $\mathbb{F}$

אז צירוף לינארי של $\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\dots+\alpha_n v_n$$

למשל

$$5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\sqrt{2}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$$

הוא צ"ל של $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}\right\}$

הגדרה: המרחב הנפרש ע"י $\underset{B}{\underset{\|}{\{v_1,\dots,v_n\}}} \subseteq V$

הוא

$\underbrace{Sp}_{\text{סימון המרחב הנפרש}}(B)=\{$ כל הצירופים הלינאריים $\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_i\in\mathbb{F}\right\}$

למשל $V=\mathbb{R}^2$

$$Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}=V$$

$$\psi$$

$$\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

הוכיחו ש-

$$\left\{\alpha_1\binom{1}{1}+\alpha_2\binom{2}{3}+\alpha_3\binom{-2}{2} \,\middle|\, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$$

<u>פתרון:</u>

($\subseteq$) ברור שלכל $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ עם צ'ף
שייך ל $\mathbb{R}^2$

($\supseteq$) יהי $\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2$ צ"ל $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$
כך ש:

$$\alpha_1\binom{1}{1}+\alpha_2\binom{2}{3}+\alpha_3\binom{-2}{2}=\binom{x}{y}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 3 & 2 & y \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & x \\ 0 & 1 & 4 & y-x \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון לכל x,y !! לכן
לכל x,y אני יכול למצוא $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$
כך שהצ'ף יתן $\binom{x}{y}$