סיבוכיות

<u>הרעיון:</u> רוצים להבדיל בין פונק' $f:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ לפי קצב הגידול שלהן.

הגדרות

תהיינה $f,\,g:\ \mathbb{N}\to\mathbb{R}_{\geq0}$.
אומרים ש$f\left(n\right)=O\left(g\left(n\right)\right)$ אם קיים קבוע $c>0$ ו$n_{0}\in\mathbb{N}$ כך ש$f\left(n\right)\leq c\cdot g\left(n\right)$ לכל $n\geq n_{0}$.
אומרים ש$f\left(n\right)=\Omega\left(g\left(n\right)\right)$ אם קיים קבוע $c>0$ ו$n_{0}\in\mathbb{N}$ כך ש$f\left(n\right)\geq c\cdot g\left(n\right)$ לכל $n\geq n_{0}$.
אומרים ש$f\left(n\right)=\Theta\left(g\left(n\right)\right)$ אם $f\left(n\right)=O\left(g\left(n\right)\right)$ ו$f\left(n\right)=\Omega\left(g\left(n\right)\right)$.
במילים אחרות - אם קיימים $c_{1},\,c_{2}>0$ ו$n_{0}\mathbb{N}$ כך שלכל $n_{0}<n$ מתקיים $c_{1}g\left(n\right)\leq f\left(n\right)\leq c_{2}g\left(n\right)$.
אומרים ש$f\left(n\right)=o\left(g\left(n\right)\right)$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right|=0$.

הערות

1. ברור שמתקיים:

$$f\left(n\right)=O\left(g\left(n\right)\right)\iff g\left(n\right)=\Omega\left(f\left(n\right)\right)$$

2. למעשה $O\left(f\left(n\right)\right)$ זו קבוצת פונק' והסימון $g\left(n\right)=O\left(f\left(n\right)\right)$ בעצם אומר $g\left(n\right)\in O\left(f\left(n\right)\right)$ (כנ"ל לΩ וΘ).
3. היחס $g\left(n\right)=\Theta\left(f\left(n\right)\right)$ הוא יחס שקילות, כלומר יש רפלקסיביות, סימטריות וטרנזטיביות.
4. O, Ω הם טרנזטיביים ורפלקסיביים אך אינם יחס שקילות.

דוגמה

$f\left(n\right)=n^{2}$ ו$g\left(n\right)=2n^{2}+5n+2$.
הוכיחו ש$g\left(n\right)=\Theta\left(f\left(n\right)\right)=\Theta\left(n^{2}\right)$.
צריך למצוא $c_{1},\,c_{2}>0$ ו$n_{0}\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים:

$$c_{1}\cdot f\left(n\right)\leq g\left(n\right)\leq c_{2}\cdot f\left(n\right)$$

לכל $n\geq n_{0}$, כלומר:

$$c_{1}n^{2}\leq2n^{2}+5n+2\leq c_{2}n^{2}$$

אפשר לבחור $c_{1}=1$ וברור שזה יתקיים.
נבחר $c_{2}=9$ ואז מתקיים

$$2n^{2}+5n+2\leq2n^{2}+5n^{2}+2n^{2}=c_{2}n^{2}$$

לכן קיבלנו שמתקיים $g\left(n\right)=\Theta\left(f\left(n\right)\right)$.

טענה

אם מתקיים:

$$0<\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(n\right)}{g\left(n\right)}=c<\infty$$

אזי מתקיים

$$f\left(n\right)=\Theta\left(g\left(n\right)\right)$$

הוכחה

קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(n)}{g(n)} - c\right| &< \frac{c}{2} \\
\frac{c}{2} \le \tfrac{f(n)}{g(n)} &\le \frac{3c}{2} \\
\frac{c}{2}\cdot g(n) \le f(n) &\le \frac{3c}{2}\cdot g(n)
\end{aligned}$$

וקיבלנו שמתקיים $f(n) = \Theta(g(n))$.

הערה

אנחנו דיברנו על פונק' מ$\mathbb{N}$ ל$\mathbb{R}_{\ge 0}$ אך אותן הגדרות חלות על פונק' מ$\mathbb{R}_{\ge 0}$ ל$\mathbb{R}_{\ge 0}$.

הערה

אם $f(n) = \Theta(g(n))$ אז הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ לא בהכרח קיים (כלומר הטענה חד-כיוונית).

דוגמה

ניקח את הפונק':

$$\begin{aligned}
f(n) &= n \\
g(n) &= \begin{cases} 2^k & 2^k \le n < 2^{k+1} \end{cases}
\end{aligned}$$

טענה: $\frac{1}{2}f(n) \le g(n) \le f(n)$ ולכן $f(n) = \Theta(g(n))$.
הוכחת הטענה: יהי k כך ש$2^k \le n < 2^{k+1}$ אזי $g(n) = 2^k$ ומתקיים $\frac{1}{2}n \le 2^k \le n$.
מצד שני, מתקיים:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{f(2^k)}{g(2^k)} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^k} = 1 \\
\lim_{k\to\infty} \frac{f(2^k - 1)}{g(2^k - 1)} &= \lim_{k\to\infty} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} = 2
\end{aligned}$$

יש שני גבולות חלקיים לכן הגבול לא קיים.

הסימון o

הסימון O מציין חסם עליון שאין לדעת אם הוא הדוק אסימפטוטית אם לאו. החסם $2n^2 = O(n^2)$ הדוק אסימפטוטית, אולם אין הדבר כן לגבי החסם $2n = O(n^2)$. לציון חסם עליון שאינו הדוק אסימפטוטית אנו משתמשים בסימון o. $o(g(n))$ (קרי: "או־קטן של g של n"), מוגדר באופן פורמלי כקבוצת הפונקציות:

$o(g(n)) = \{f(n) :$ עבור כל קבוע חיובי $c > 0$, קיים קבוע $n_0 > 0$ כך ש־ $0 \le f(n) < cg(n)$ לכל $n \ge n_0$ $\}$.

לדוגמה, $2n = o(n^2)$, אולם $2n^2 \neq o(n^2)$.

הגדרותיהם של הסימונים O ו־o דומות. ההבדל העיקרי ביניהן הוא זה: כאשר $f(n) = O(g(n))$, האי־שוויון $0 \le f(n) \le cg(n)$ מתקיים עבור קבוע *מסוים* $c > 0$, ואילו כאשר $f(n) = o(g(n))$, האי־שוויון $0 \le f(n) < cg(n)$ מתקיים עבור *כל* הקבועים $c > 0$. אינטואיטיבית, כאשר $f(n) = o(g(n))$, הרי שכאשר n שואף לאינסוף, הפונקציה $f(n)$ מאבדת את משקלה היחסי לעומת $g(n)$; כלומר,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \qquad (2.1)$$

ישנם ספרים המשתמשים בגבול זה כהגדרה של הסימון o; ההגדרה בספר זה דורשת גם שכל פונקציה השייכת לקבוצה תהיה אי־שלילית אסימפטוטית.

הסימון ω

היחס בין הסימון ω לסימון Ω מקביל ליחס בין הסימון o לסימון O. אנו משתמשים בסימון ω לציון חסם תחתון שאינו הדוק אסימפטוטית. אחת הדרכים להגדיר זאת היא:

$f(n) \in \omega(g(n))$ אם ורק אם $g(n) \in o(f(n))$.

באופן אחר, $\omega(g(n))$ (קרי: "אומגה־קטן של g של n") מוגדר כקבוצת הפונקציות:

$\omega(g(n)) = \{f(n) :$ עבור כל קבוע חיובי $c > 0$, קיים קבוע $n_0 > 0$ כך ש־ $0 \le cg(n) < f(n)$ לכל $n \ge n_0$ $\}$.

לדוגמה, $n^2/2 = \omega(n)$, אולם $n^2/2 \neq \omega(n^2)$. מן הקשר $f(n) = \omega(g(n))$ נובע:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

אם גבול זה קיים. כלומר, $f(n)$ גדל כרצוננו ביחס ל־$g(n)$, כאשר n שואף לאינסוף.

כללי אצבע

1. אין משמעות לקבועים:

$$\forall c>0 \quad f(n)=\Theta(c\cdot f(n))$$

2. רק הגורם ה"גדול ביותר" משפיע:

$$f(n)+o(f(n))=\Theta(f(n))$$

פרקטית:

$$0<\alpha<\beta \Rightarrow n^{\alpha} << n^{\beta}$$

(הסימון $<<$ אומר $n^{\alpha}=o\left(n^{\beta}\right)$).
לחילופין:

$$\alpha_1 n^{a_1}+\alpha_2 n^{a_2}+...+\alpha_r n^{a_r}=\Theta\left(n^{a_1}\right)$$

כאשר

$$a_1>a_2>...>a_r$$

3. בעזרת לופיטל אפשר להראות:

$$...\ll(\log\log n)^{\delta}\ll(\log n)^{\gamma}\ll n^{\alpha}\ll\beta^{n}\ll n!\ll n^{n}$$

כאשר $\beta>1$ ו$\alpha,\gamma,\delta>0$.

דוגמה

הוכיחו:

$$(\log n)^3=o\left(n^{0.001}\right)$$

הוכחה

צ"ל שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^3}{n^{0.001}}=0$$

ע"י לופיטל:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^3}{n^{0.001}} &= \lim\frac{3(\log n)^2\frac{1}{n}}{n^{-0.999}\cdot 0.001}\\ &= \lim\frac{3000\log^2 n}{n^{0.001}}=0\end{aligned}$$

הגדרה

פונק' $f(n)$ נקראת פולינומיאלית אם $\exists\alpha>0: \ f(n)=O(n^{\alpha})$.
פונק' $f(n)$ נקראת אקספוננציאלית אם $f(n)=\Omega(a^n)$ עבור $a>1$.

תרגיל

הוכח: $O(2^n)\neq 3^n$.

הוכחה

צ"ל שלכל $c>0$ ו-$n_0\in\mathbb{N}$ קיים $n>n_0$ כך ש-$3^n>c\cdot 2^n$.
יהיו $c,\,n_0$ כנ"ל. נבחר $n>\max\left\{\log_{1.5}c,\,n_0\right\}$ ומתקיים:

$$3^n\geq c\cdot 2^n$$

תרגיל

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}=\Theta\left(n\sqrt{n}\right)$$

דרך א'

קירוב של הסכום ע"י אינטגרל - לא נעשה את הדרך הזו.

דרך ב'

ברור שמתקיים

$$\sqrt{1}+..+\sqrt{n}\leq 1\cdot n\sqrt{n}$$

כעת:

$$\begin{aligned}\sqrt{1}+..+\sqrt{n} &\geq \sqrt{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}+...+\sqrt{n}\\ &\geq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\\ &= \Theta\left(n\right)\sqrt{\Theta\left(n\right)}=\Theta\left(n\sqrt{n}\right)\geq c\cdot n\sqrt{n}\end{aligned}$$

הערה

שימו לב שמספיק להראות שהחסם התחתון הוא $\Omega\left(n\sqrt{n}\right)$ ושהחסם העליון הוא $O\left(n\sqrt{n}\right)$ בהוכחה.

הערה

השתמשנו בכללים הבאים:

$$\begin{aligned}O\left(f\left(n\right)\right)^{\alpha} &= O\left(f\left(n\right)^{\alpha}\right)\\ O\left(f\left(n\right)\right)\cdot O\left(g\left(n\right)\right) &= O\left(f\left(n\right)g\left(n\right)\right)\\ O\left(f\left(n\right)+g\left(n\right)\right) &= O\left(f\left(n\right)\right)+O\left(g\left(n\right)\right)\end{aligned}$$

הנ"ל נכון גם עבור Ω ו-Θ.

תרגיל

הוכח:

$$\max\left\{f\left(n\right),\,g\left(n\right)\right\}=\Theta\left(f\left(n\right)+g\left(n\right)\right)$$

הוכחה

יהי $n \in \mathbb{N}$. בה"כ $f(n) \le g(n)$.
מצד אחד:

$$\max\{f(n), g(n)\} \le 1 \cdot (f(n) + g(n))$$

מצד שני:

$$\begin{aligned}\max\{f(n), g(n)\} &= g(n) \\ &\ge \frac{1}{2}g(n) + \frac{1}{2}g(n) \\ &\ge \frac{1}{2}(f(n) + g(n))\end{aligned}$$

לכן

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$$

תרגיל

בדקו בבית ש$n \ln n$ היא פונק' מונוטונית עולה ממש ב$[1, \infty)$.
תהי $f(n)$ הפונק' ההפוכה ($f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$).
הוכיחו:

$$f(n) = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

הוכחה

צ"ל c_1, c_2 כך שמתקיים:

$$c_1 \frac{n}{\ln n} \le f(n) \le c_2 \frac{n}{\ln n}$$

נפעיל $n \ln n$ על כל האגפים:

$$c_1 \frac{n}{\ln n} \ln\left(c_1 \frac{n}{\ln n}\right) \le n \le c_2 \frac{n}{\ln n} \ln\left(c_2 \frac{n}{\ln n}\right)$$

נפתח את צד שמאל:

$$\begin{aligned}c_1 \frac{n}{\ln n} \ln\left(c_1 \frac{n}{\ln n}\right) &= c_1 \frac{n}{\ln n}(\ln c_1 + \ln n - \ln\ln n) \\ &= c_1 n \left(\frac{\ln c_1}{\ln n} + 1 - \frac{\ln\ln n}{\ln n}\right) \\ &= c_1 n (1 + o(1))\end{aligned}$$

ועבור $c_1 < 1$ וn מספיק גדול, נקבל שn גדול מהביטוי הנ"ל, כי אז

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1 n (1 + o(1))}{n} = c_1 < 1$$

באותו אופן אפשר להראות שאם נבחר $c_2 > 1$ אז עבור n מספיק גדול מתקיים

$$n < c_2 \frac{n}{\ln n} \ln\left(c_2 \frac{n}{\ln n}\right)$$

ולכן הראנו שמתקיים

$$f(n) = \Theta\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$