פתרון תרגיל בית 10 אלגברה מופשטת 2

מודולים

1. מצאו 2 מבנים שונים של $\mathbb{Z}_{11}$ בתור $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$-מודול.

פתרון:
יש רק מבנה אחד בתור $\mathbb{Z}$- מודול, נשאר רק לקבוע מה יהיה כפל ב$\sqrt{5}$.
צריך להתקיים לכל $m \in \mathbb{Z}_{11}$ ש $\sqrt{5} * \left(\sqrt{5} * m\right) = 5 * m = 5m$.
אם $\sqrt{5} * m = am$ אז צריך להתקיים $a^2 = 5$ ולזה יש שני פתרונות ב$\mathbb{Z}_{11}$: $4, 7$.
ולכן ניתן להגדיר פעולה בשתי דרכים:

$$\begin{aligned}\left(a + \sqrt{5}b\right) * m &= am + 4bm \\ \left(a + \sqrt{5}b\right) * m &= am + 7bm\end{aligned}$$

[כל זה בנוסף למבנה הטריוויאלי של $x * m = 0$ לכל x, m.]

2. יהי M מודול מעל R/I. הוכיחו כי M הוא גם R-מודול לפי הפעולה $rm := (r + I)m$. הראו גם ש$Ann_R(M) \supseteq I$.

פתרון:
יש להראות שכל התכונות מתקיימות...
למשל $1_R m = (1_R + I)m = 1_{R/I} m = m$.
נראה ש $I \subseteq Ann_R(M)$: עבור $i \in I$
$im = (i + I)m = Im = 0_{R/I} m = 0$ ולכן $i \in Ann_R(M)$.

3. יהי M מודול מעל R ויהי $I \lhd R$ אידיאל.

(א) הוכיחו כי $IM = \left\{\sum_{finite} r_i a_i \,|\, r_i \in I,\ a_i \in M\right\}$ הוא תת מודול של M.

פתרון:
נקח שני איברים $x = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i,\ y = \sum_{j=1}^{k} s_j a_j \in IM$, ע"י הוספת אפסים לסכומים נוכל להניח כי הסכומים רצים על אותם איברים $\{a_1, \ldots, a_m\}$מM.
IM היא תת חבורה חיבורית כי $x - y = \sum_{i=1}^{m} (r_i - s_i) a_i \in IM$.
וזהו תת-מודול כי לכל $r \in R$ $rr_i \in I$ ולכן $rx = \sum rr_i a_i \in IM$.

(ב) הוכיחו כי M/IM הוא מודול מעל R/I.

פתרון:

מכיוון ו IM הוא תת-מודול, אז M/IM הוא מודול מעל R ובפרט חבורה חיבורית.

נגדיר מבנה של מודול מעל R/I ע"י $(r+I)(m+IM)=rm+IM$, ונבדוק שמתקיימיות כל הדרישות.

מוגדר היטב: נקח $i\in I$, אז $r+I=r+i+I$ ונבדוק

$$(r+i+I)(m+IM)=(r+i)m+IM=rm+\underbrace{im}_{\in IM}+IM=rm+IM=(r+I)(m+M)$$

עוד תכונה:

$$(r+I)\left((s+I)(m+IM)\right)=(r+I)(sm+IM)=rs+IM=(rs+I)(m+IM)$$

וכולי...(השלימו את כל התכונות).

4. יהי M מודול מעל R, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) עבור תתי מודולים $N,K,L\le M$ כך ש $M=N\oplus K$ מתקיים $L=(L\cap N)\oplus(L\cap K)$.

הפרכה. עבור $M=\mathbb{R}^2$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2=\{(x,0\}\oplus\{(0,x)\}$ אבל $L=\{(x,x)\}$ הוא לא סכום ישר של החיתוכים.

(ב) עבור תתי מודולים K ו $N\subseteq L$ כך ש $M=N\oplus K$ מתקיים $L=(L\cap N)\oplus(L\cap K)$.

הוכחה: צריך להוכיח ש $L=N\oplus(L\cap K)$.

ראית נשים לב שהסכום באמת ישר: $N\cap(L\cap K)\subseteq N\cap K=\{0\}$.

ההכלה $L\supseteq N\oplus(L\cap K)$ ברורה, נראה את ההפוכה.

אם $l\in L$ אז מכיוון ש $l\in M$ אז $l=n+k$ לאיזשהם $n\in N,k\in K$.

אזי $k=l-n\in L$ (כי $n\in N\subseteq L$) ולכן $k\in L\cap K$.

(ג) עבור תתי מודולים $K\subseteq N$ וL מתקיים $K+(N\cap L)=N\cap(K+L)$.

הוכחה: לפי הנתונים $K,N\cap L\subseteq N$ וגם ברור ש $K,N\cap L\subseteq K+L$ ולכן $K+(N\cap L)\subseteq N\cap(K+L)$.

בכיוון השני, ניקח $x=N\cap(K+L)$ אזי אפשר לרשום $x=k+l=n$ עבור $k\in K,l\in L,n\in N$.

אז $l=n-k\in N$ ולכן $l\in L\cap N$ מה שמראה ש $x=k+l\in K+(L\cap N)$ כדרוש.

(ד) עבור תתי מודולים $N \subseteq K$ ו L,
אם $K+L=N+L$ ו $N\cap L=K\cap L$ אז $N=K$.
הוכחה: בעצם יש להראות ש $K\subseteq N$.
נקח $n\in N$, אזי מהנתון $N+L=K+L$ נובע שניתן לרשום $n=k+l$.
אזי $l=n-k\in N$ ולכן $l\in L\cap N$, לפי הנתון זה אומר ש $l\in K\cap L$ כלומר $n=k+l\in K$.

(ה) עבור תתי מודולים $N,K,L\leq M$,
אם $K+L=N+L$ ו $N\cap L=K\cap L$ אז $N=K$.
הפרכה:
נתבונן במ"ו $\mathbb{R}^2$, ונקח $N=\{(x,0)\},K=\{(0,k)\},L=\{(x,x)\}$.
אזי $L\cap N=L\cap K=\{(0,0)\}$ ו $L+N=L+K=\mathbb{R}^2$, אבל $N\neq K$.

5. יהי M R-מודול.
תת מודול $N\leq M$ נקרא תת-מודול גדול של M אם לכל תת מודול $0\neq N'\leq M$ מתקיים $N\cap N'\neq 0$.
מסמנים זאת ע"י $N\leq_l M$.

(א) הוכיחו עבור תתי מודולים N_1,N_2 כי $N_1,N_2\leq_l M$ אם"ם $N_1\cap N_2\leq_l M$.
$\Rightarrow$: $N_1\cap N_2\subseteq N_1,N_2$ ולכן ברור שאם החיתוך הוא תת-מודול גדול של M אז גם N_1,N_2 גדולים. (למה?).
$\Leftarrow$: נקח תת-מודול $0\neq N'\leq M$,

$$(N_1\cap N_2)\cap N'=N_1\cap\left(\underbrace{N_2\cap N'}_{\neq 0}\right)\neq 0$$

N_2 גדול ולכן $N_2\cap N'\neq 0$, ואז בגלל ש N_1 גדול אז החיתוך שלו עם $N''=N_2\cap N'$ הוא לא טריוויאלי.

(ב) הוכיחו כי $N\leq_l M$ אם"ם לכל $0\neq a\in M$ קיים $r\in R$ כך ש $ra\neq 0$ ו $ra\in N$.
$\Leftarrow$: נקח $0\neq a\in M$ ונתבונן בתת מודול Ra. לפי ההנחה N גדול ולכן $Ra\cap N\neq 0$ מה שאומר שיש $r\in R$ כך ש $0\neq ra\in N$.
$\Rightarrow$: ניקח תת מודול $0\neq N'\leq M$, ונקח $0\neq a\in N'$. לפי ההנחה יש $r\in R$ כך ש $0\neq ra\in N$, נשים לב שגם $ra\in N'$ כי הוא תת-מודול ולכן $ra\in N\cap N'\neq 0$.

(ג) בעזרת הלמה של צורן, הראו כי לכל תת מודול $N\leq M$ קיים תת מודול $K\leq M$ כך ש $K\oplus N\leq_l M$.

יהי N תת-מודול, ונסתכל על הקבוצה $L = \{N' \leq M \mid N \cap N' = 0\}$.
אם ניקח שרשרת בL: $\{N'_i\}_{i\in I}$ אזי $\cup_{i\in I} N'_i$ הוא תת-מודול של M (למה?) ומקיים $N \cap (\cup_{i\in I} N'_i) = \cup_{i\in I}(N \cap N'_i) = \cup_{i\in I}\{0\} = \{0\}$ ולכן האיחוד שייך לL.
אם כן, אפשר להשתמש בלמה של צורן ולקחת תת-מודול K שהוא מקסימלי בL.
נראה ש $K \oplus N \leq_l M$:
יהי תת-מודול $M \geq Q \neq 0$ ונניח בשלילה ש $(K+N) \cap Q = 0$ אזי $N \cap (K+Q) = 0$ (למה?) מה שאומר ש $K+Q \in L$.
אבל K הוא מקסימלי בL ולכן $K \supseteq Q$ מה שאומר ש $(K+N) \cap Q = Q + (Q \cap N) \neq 0$ בסתירה להנחת השלילה.

הערה: שימו לב שהראתם שתמיד יש תת-מודול גדול (חוץ מבמקרה הטריוויאלי). מזה אפשר להסיק שעבור תתי מודולים, לא תמיד יש השלמה (כלומר לא תמיד אפשר להשלים את $M = N\oplus ?$) בניגוד למה שידוע לנו מלינארית על תת-מרחבים וקטוריים.

6. יהי M מודול מעל R ו $N \leq M$ תת מודול. הוכיחו כי אם N ו M/N נוצרים סופית (בתור מודולים מעל R) אז גם M נוצר סופית.
הראו שהכיוון ההפוך אינו נכון ע"י דוגמא נגדית.

7. הראו כי $\mathbb{Q}$ הוא לא חופשי כמודול מעל $\mathbb{Z}$.
פתרון:
כל שני שברים הם תלויים כי עבור $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ מתקיים

$$bc\frac{a}{b} - ad\frac{c}{d} = 0$$

ולכן אם $\mathbb{Q}$ היה חופשי, הוא היה חייב להיות מדרגה 1, כלומר ציקלי ואז $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}$ כחבורות אבליות, מה שכמובן איננו נכון (למה?).

למעשה אפשר להכליל את התוצאה הזאת לכל שדה שברים כמודול מעל התח"ש (בתנאי שתח"ש הוא לא שדה בעצמו)!

8. (בסיס מכל גודל)
יהי V מרחב וקטורי עם בסיס אינסופי בן מנייה $\{e_0, e_2, e_3, \dots\}$.
נתבונן בחוג $R = End(V)$ (אוסף ההעתקות הלינאריות) ונסתכל עליו כמודול מעל עצמו.

עבור n נגדיר את ההעתקות $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ להיות

$$f_i(e_m) = \begin{cases} 0 & m \pmod n \neq i \\ e_{\frac{m-i}{n}} & m \pmod n = i \end{cases}$$

לכל m טבעי.
הוכיחו כי $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$ הוא בסיס של R כמודול מעל עצמו לכל n.