פתרון תרגיל בית 12– טופולוגיה

שאלה 1

א. יהי X מ"ט דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x\in X$ מתקיים $\{x\}\in B$.

ב. יהי X מ"ט עם בסיס B, Y קבוצה ו- $f:X\to Y$ פונקציה **על**. הוכיחו/הפריכו: $B'=\{O\subseteq Y: f^{-1}(O)\in B\}$ בסיס לטופולוגיית המנה על Y.

ג. יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי ותהי $f:\mathbb{R}_l\to\mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם. מצאו את טופולוגיית המנה τ על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f.

פתרון

א. נסמן את הטופולוגיה הדיסקרטית ב- τ. תהי $x\in X$ אזי $\{x\}\in\tau$. B בסיס ולכן קיימת $U\in B$ כך ש- $x\in U\subseteq\{x\}$. מכאן בהכרח $U=\{x\}\in B$.

ב. נפריך את הטענה.ניקח $X=\mathbb{Z}$ מ"ט דיסקרטי כש-B הוא בסיס המורכב מכל הנקודונים. תהי Y הקבוצה $\mathbb{Z}_3$ ו- $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$ מוגדרת ע"י $f(m)=m(\mathrm{mod}\,3)$. קל לראות שבמקרה זה טופולוגית המנה τ על Y היא הדיסקרטית. נראה ש- $\{0\}\notin B'$ ולכן על-פי הסעיף הקודם B' אינו בסיס לטופולוגיית המנה על Y. ואכן, אחרת, $\{0\}\in B'$ אבל אז נקבל מהגדרת B' ש- $f^{-1}(\{0\})=3\mathbb{Z}\in B$ בסתירה להגדרת B.

דוגמה נוספת: $Y=\{a,b\}$, $X=\{x,y,z\}$, נבחר $B=\{\{x\},\{y\},\{z\}\}$, ונגדיר את $f:X\to Y$ על-ידי $f(z)=b$, $f(x)=f(y)=a$. אזי B' הוא לא בסיס ל- Y (בדקו!).

ג. $\tau=\tau_{disc}$ הטופולוגיה הדיסקרטית. הוכחנו בעבר ש- $f:\mathbb{R}_l\to(\mathbb{Z},\tau_{disc})$ פונקציית הערך השלם רציפה ולכן נקבל מיידת ש- $\tau=\tau_{disc}$.

<u>שאלה 2</u>

נתבונן ב- $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית ובפונקצית הערך השלם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$. נסמן ב- τ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס ל- f .

א. הוכיחו שמתקיים $A\in\tau \Leftrightarrow$ אם $n\in A$ אז $n-1\in A$.

ב. הסיקו כי $\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{(-\infty,M]\cap\mathbb{Z}:M\in\mathbb{Z}\}$.

<u>פתרון</u>

א. $\Leftarrow$ נניח ש $n\in A\in\tau$. מתקיים $n\in f^{-1}(A)$, אמנם, $f(n)=[n]=n\in A$. כמו כן מכיון ש- τ טופולוגיית מנה ו- $A\in\tau$ נקבל ש $f^{-1}(A)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ (ולכן היא סביבה של n). לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $(n-\varepsilon,n+\varepsilon)\subseteq f^{-1}(A)$. בפרט, קיים $n-1<t<n$ המקיים $t\in(n-\varepsilon,n+\varepsilon)\subseteq f^{-1}(A)$. מכאן, $f(t)=[t]=n-1\in A$.

$\Rightarrow$תהי $A\subseteq\mathbb{Z}$ כך שאם $n\in A$ אז $n-1\in A$. נראה ש $A\in\tau$ לפי הגדרת טופולגיית מנה. נחלק למקרים:

מקרה ראשון: $A=\varnothing$. קל לראות ש- $f^{-1}(A)=f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן $A=\varnothing\in\tau$.

מקרה שני: $A\neq\varnothing$ וקיים ל- A מקסימום M . קל לראות ש- $f^{-1}(A)=(-\infty,M+1)$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ ולכן $A\in\tau$.

מקרה שלישי: $A\neq\varnothing$ ללא חסם מלעיל. מהתנאי נקבל ש- $A=\mathbb{Z}$. במצב זה, $f^{-1}(A)=\mathbb{R}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

ב. מהאפיון שהוכחנו ובייחוד מהכיוון $(\Rightarrow)$ נקבל ש-
$\tau=\{\varnothing,\mathbb{Z}\}\cup\{(-\infty,M]\cap\mathbb{Z}:M\in\mathbb{Z}\}$.

<u>שאלה 3</u>

א. יהיו X,Y מ"ט, $f:X\to Y,\ g:Y\to X$ רציפות ומתקיים $f\circ g=id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.

ב. תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

<u>פתרון</u>

א. עלינו להוכיח שני תנאים:

1. f על – נובע מכך שפונקצית הזהות היא על.

2. $U\subseteq Y$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. כיוון $\Leftarrow$ ברור מרציפותה של f. נוכיח את הכיוון השני. תהי $f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X. בשל רציפות g, $g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ פתוחה ב- Y.

מאידך $(f\circ g)^{-1}(U)=Id^{-1}(U)=U$. והוכחנו הדרוש.

ב. $\Leftarrow$ מיידי מהגדרת הומיאומורפיזם.

$\Rightarrow$ מספיק להוכיח כי ההעתקה פתוחה (רציפות ועל נובעות מכך ש- f היא העתקת מנה, חח"ע נתונה). תהי $V\subseteq X$ פתוחה. $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ (שימו לב שהשוויון מתקיים מכיוון ש- f חח"ע), מכיוון ש- $V=f^{-1}\left(f(V)\right)$ פתוחה ב- X נקבל ע"פי הגדרת העתקת מנה ש- $f(V)$ פתוחה ב-

<u>שאלה 4</u>

א. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל- $\hat{f}$ מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}^2/\sim$.

ב. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$. לְמה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

<u>פתרון</u>

א. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על-ידי $f(x,y)=x+y^2$. מתקיים

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)\Leftrightarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$,

לכן $\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\to\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי $\hat{f}\left[(x,y)\right]=f(x,y)$ היא חח"ע; ומכיוון ש- f רציפה כך גם $\hat{f}$.

נראה ש- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה:

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת על-ידי $g(x)=\left[(x,0)\right]$ אזי $g=\rho\circ h$ באשר

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ h(x)=(x,0)$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות (שימו לב ש- h רציפה כפונקציה לתוך מרחב מכפלה, אשר רציפה רכיב רכיב. בנוסף, שימו לב שהטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}^2$ מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה). נותר להוכיח כי $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$.

$g\circ\hat{f}\left[(x,y)\right]=g(x+y^2)=\left[\left(x+y^2,0\right)\right]=\left[(x,y)\right]$ לכן ההרכבה $g\circ\hat{f}$ היא הזהות ($id_{\mathbb{R}^2/\sim}$). ניתן להראות שההרכבה בכיוון השני נותנת גם היא

את פונקציית הזהות ($id_{\mathbb{R}}$).

מכאן $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה וקיבלנו בסה"כ ש- $\mathbb{R}^2/\sim$ הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

ב. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$ על-ידי $f(x,y)=x^2+y^2$. (שימו לב ש- f על $[0,\infty)$). בדיוק כמו בסעיף א' מסיקים ש- $\hat{f}$ חח"ע ורציפה וגם כאן אם נגדיר $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2/\sim$ על-ידי $g(x)=\left[\left(\sqrt{x},0\right)\right]$ בדומה לסעיף א' ניתן לבדוק ולראות ש- $g=\left(\hat{f}\right)^{-1}$ (בדקו הרכבה בשני הכיוונים ותקבלו את פונקציות זהות). כעת מספיק להוכיח ש- g רציפה. ואמנם $g=\rho\circ t\circ r$ באשר $\begin{cases} r:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ r(x)=\sqrt{x} \\ t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, t(x)=(x,0)\end{cases}$ ולכן g רציפה כהרכבת רציפות וקיבלנו בסה"כ ש- $\mathbb{R}^2/\sim\ \cong[0,\infty)$.

<u>שאלה 5</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא:

$x\sim y \Leftrightarrow (x=-y)\vee(x=y)$. הראו ש- X הומיאומורפי ל- $[0,\infty)$.

<u>פתרון</u>

המועמד הטבעי $f(x)=|x|$.

מתקיים $x\sim y \Leftrightarrow (x=y)\vee(x=-y) \Leftrightarrow |x|=|y| \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & & {[0,\infty)} \\
& \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

f רציפה ולכן $\hat{f}$ רציפה.

נמצא את הפונקציה ההופכית של $\hat{f}$. נגדיר: $g:[0,\infty)\to \mathbb{R}/\sim$ על-ידי: $g(x)=[x]$.

לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים: $\hat{f}\circ g(x)=\hat{f}([x])=f(x)=|x| \underset{x\geq 0}{=} x$.

מצד שני, לכל $[x]\in \mathbb{R}/\sim$ מתקיים $g\circ\hat{f}([x])=g(f(x))=g(|x|)=[|x|]\underset{x\sim|x|}{=}[x]$.

לכן g היא הפונקיצה ההופכית של $\hat{f}$. קל לראות ש-$g=\rho|_{[0,\infty)}$ ומכיון ש- ρ רציפה אז גם g.

בסה"כ $\hat{f}$ רציפה, הפיכה ו- $\left(\hat{f}\right)^{-1}$ רציפה ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

<u>דרך אחרת</u>: ניתן להראות ש- f היא העתקה פתוחה (תמונה של קטע פתוח היא קבוצה פתוחה) ולכן מנה (שכן היא רציפה ועל) ולכן $\hat{f}$ מנה (שכן היא חח"ע).

<u>שאלה 6</u>

יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל על-ידי זה שמזהים זו לזו את כל הנקודות $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|x|\geq 1$. בלשון אחרת, X הוא מרחב המנה $\mathbb{R}/\sim$ כאשר ~ הוא יחס שקילות המוגדר באופן הבא: $x\sim y$ אם ורק אם $x=y$ או $|x|\geq 1$ וגם $|y|\geq 1$. הראו ש- X הומיאומורפי למעגל $S^1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$.

<u>פתרון</u>

תזכורת: הקטע $\left[0,1\right]$ כשמזהים בו את הנקודות $0,1$ הומיאומורפי ל- S^1.

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to S^1$ המכבדת את יחס השקילות.

כל הנקודות מחוץ ל- $(-1,1)$ עוברות לאותה נקודה במנה, ולכן נעתיק את $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,\infty\right)$ לאותה נקודה אליה נשלחות $-1,1$.

אנחנו יודעים איך להעתיק את $\left[0,1\right]$ ל- S^1 ולכן נעתיק את $\left[-1,1\right]$ ל-$\left[0,1\right]$ הומיאומורפית על-ידי הפונקציה הטבעית $h:[-1,1]\to[0,1]$ המוגדרת על-ידי $h(x)=\frac{x+1}{2}$ (שימו לב ש- $h\left(-1\right)=0\,;\,h\left(1\right)=1$). לאחר מכן נרכיב אותה עם הפונקציה הידועה $g:[0,1]\to S^1$ המוגדרת על-ידי $g\left(x\right)=\left(\cos 2\pi x,\sin 2\pi x\right)$ (שימו לב שהנקודות $0,1\in\left[0,1\right]$ עוברות תחת g לנקודה $\left(1,0\right)\in S^1$). לכן, $\left(1,0\right)\in S^1$ $g\left(h\left(1\right)\right)=g\left(h\left(-1\right)\right)=$.

כעת $f:\mathbb{R}\to S^1$ מוגדרת באופן הבא:

$$f\left(x\right):=\begin{cases} g\left(h\left(x\right)\right) & \left|x\right|\le 1 \\ \left(1,0\right) & \left|x\right|\ge 1 \end{cases}.$$

<u>תת-טענה</u>: f רציפה.

<u>תת-הוכחה</u>: נשתמש במשפט שראינו בכיתה: X,Y מ"ט, ויהי $C_1,...,C_n$ כיסוי סגור של X, כלומר C_i סגורה עבור $1\le i\le n$, ומתקיים $X=\bigcup_{i=1}^{n}C_i$. אם $f:X\to Y$ פונקציה כך ש- $f|_{C_i}$ רציפה לכל $1\le i\le n$, אזי f רציפה.

במקרה שלנו, מתקיים $\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}\cup\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}$ וכן $\{x\in\mathbb{R}:|x|\le 1\}=[-1,1]$; $\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge 1\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ ומכאן הן סגורות המקיימות את תנאי המשפט, ולכן f רציפה.

מש"ל תת-טענה.

<u>סיכום ביניים:</u>

- $f:\mathbb{R}\to S^1$ רציפה ועל;
- מתקיים $x\sim y$ אם ורק אם $f(x)=f(y)$
  ולכן $\hat{f}:\mathbb{R}/\sim\;\to S^1$ חח"ע;
- f רציפה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ רציפה;
- f על $\Leftarrow$ $\hat{f}$ על.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & & S^1 \\ & \mathbb{R}/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

נוכיח כעת ש- $\mathbb{R}/\sim$ הוא מרחב קומפקטי: נשים לב שצמצום העתקת המנה $\rho|_{[-1,1]}:[-1,1]\to\mathbb{R}/\sim$ היא העתקה רציפה ו**על** ממרחב קומפקטי, ולכן גם התמונה $\mathbb{R}/\sim$ היא מרחב קומפקטי.

כעת $\hat{f}$ רציפה מקומפקטי להאוסדורף, ולכן היא העתקה סגורה.

כלומר $\hat{f}$ רציפה, סגורה, חח"ע ו**על**, ולכן היא הומיאומורפיזם.

<u>שאלה 7</u>

מצאו דוגמה להעתקת מנה שאינה פתוחה ואינה סגורה.

<u>פתרון</u>

בתרגול האחרון פתרנו את התרגיל הבא:

נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב $X=\{0,1\}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\varnothing, X, \{0\}\}$.

א. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.

ב. יהי $I=[0,1]$ ותהי $f:I\to\{0,1\}$ מוגדרת על-ידי $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1 & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

נגדיר יחס שקילות על I באופן הבא: $a\sim b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$ הוכיחו כי $I/\sim$ הומיאומורפי למרחב שרפינסקי.

הפונקציה f היא פונקצית מנה ונראה כעת שהיא אינה פתוחה ואינה סגורה.

אינה פתוחה: $\left(\frac{3}{4},1\right]$ פתוחה ב-I וגם $f\left(\left(\frac{3}{4},1\right]\right)=\{1\}\notin\tau$.

אינה סגורה: $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ סגורה ב-I וגם $f\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)=\{0\}$ אינה סגורה ב-(X,τ).