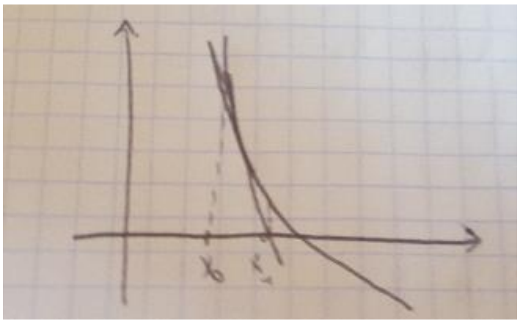
תרגול 5

21 יולי, 2016

<u>תזכורת:</u>

1) שיטת ניוטון רפסון –



$$x_{n+1} = \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

כלומר, שיטת ניוטון- רפסון היא מקרה פרטי של שיטת נקודת שבת ($fixed\ point$) –

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

2) קצב וסדר התכנסות –

$$\underbrace{p}_{\text{סדר התכנסות}}$$

$$\underbrace{c}_{\text{קצב התכנסות}} = \frac{\left|\varphi^{(p)}(x_0)\right|}{p!}\ , \varphi^{(p)}(x_0) \neq 0$$

<u>שיטות למציאת שורש מרובה</u>

<u>הגדרה:</u> x_0 נקרא שורש מרובה מסדר m של הפונקציה $f(x)$ אם –

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$

אבל – $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

<u>שיטת $N.R$ (משופרת)</u>

<u>שיטה 1 (ידוע הריבוי של השורש):</u>

אם ידוע הריבוי של השורש אז במקום שיטת ניוטון-רפסון הרגילה נקבל נוסחה איטרטיבית (ניוטון-רפסון המשופרת) באופן הבא:

$$x_{n+1} = x_n - k * \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

כאשר k זה הריבוי של השורש. סדר ההתכנסות של שיטת ניוטון-רפסון המשופרת כאשר ידוע הריבוי (k) הוא **<u>2</u>**.

תרגול 5

21 יולי, 2016

הערה:

- אם x_0 הוא שורש מרובה והשתמשתי $N.R$ הרגיל אז סדר ההתכנסות הוא 1.
- מעבר משיטת ניוטון-רפסון המשופרת לרגילה –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

כאשר x_0 שורש מריבוי k של f.

אם נגדיר –

$$g(x) = \left(f(x)\right)^{\frac{1}{k}}$$

נקבל ש - x_0 שורש מריבוי 1 של g.

שיטה 2 (**לא** ידוע הריבוי של השורש):

נתון x_0 שורש מריבוי $k > 1$ (לא ידוע).

נגדיר - $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ואז ל- h יש שורש פשוט.

כעת , נשתמש בשיטת ניוטון-רפסון הרגילה עבור הפונקציה - $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$:

$$\varphi(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}} = x - \frac{f(x) * f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}$$

ולכן –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x) * f'(x)}{\left(f'(x)\right)^2 - f(x) * f''(x)}$$

הערה:

שיטה 2 -

חסרון: צריך לחשב את $f''(x)$.

יתרון: לא צריך לדעת את הריבוי של השורש.

שיטה 1 –

חסרון: שיטה זאת ניתן להפעיל רק כאשר ידוע הריבוי של השורש (k).

יתרון: ביצוע השיטה לא יותר קשה מ - $N.R$ הרגיל.

תרגול 5

21 יולי, 2016

תרגיל:

נתונה הפונקציה - $f(x)=e^x-x-1$.

א) הראה שיש ל- f שורש מרובה מסדר שני בנקודה x_0.

ב) הראה ששיטת $N.R$ המקורית מכנסת לאט יותר משיטת ניוטון-רפסון המשופרת (במקרה של שורש מרובה) עד שגיאה מוחלטת של $|x_n-p|<10^{-5}$.

פתרון:

א) נמצא תחילה שורש של f:

נשים לב כי –

$$f(0)=e^0-0-1=0$$

ולכן $x=0$ שורש של f. כעת נבדוק האם הוא שורש מרובה –

$$f'(x)=e^x-1 => f'(0)=e^0-1=0$$

$$f''(x)=e^x => f(0)=e^0=1\neq 0$$

ולכן $x=0$ שורש מרובה מסדר 2.

ב) ניזכר בנוסחאות האיטרציה עבור כל שיטה –

$$N.R \text{ רגילה} => x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$N.R \text{ משופרת} => x_{n+1}=x_n-k*\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

ונציב את הנתונים שלנו –

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{e^{x_n}-x_n-1}{e^{x_n}-1} & , \text{ רגילה} \\ x_{n+1}=x_n-2*\dfrac{e^{x_n}-x_n-1}{e^{x_n}-1} & , \text{ משופרת} \end{cases}$$

נבצע כמה איטרציות בכל שיטה עבור ניחוש התחלתי של $x_0=1$ -

<u>ניוטון רפסון הרגילה:</u>

$$x_1=x_0-\frac{e^{x_0}-x_0-1}{e^{x_0}-1}=1-\frac{e^1-1-1}{e^1-1}=0.58198$$

$$x_2=x_1-\frac{e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}-1}=0.589198-\frac{e^{0.58198}-0.58198-1}{e^{0.58198}-1}=0.31906$$

ניוטון-רפסון המשופרת:

$$x_1 = x_0 - 2 * \frac{e^{x_0} - x_0 - 1}{e^{x_0} - 1} = 1 - 2 * \frac{e^1 - 2}{e^1 - 1} = 0.1639$$

$$x_2 = x_1 - 2 * \frac{e^{x_1} - x_1 - 1}{e^{x_1} - 1} = 0.1639 - \frac{e^{0.1639} - 0.1639 - 1}{e^{0.1639} - 1} = 4.4 * 10^{-3}$$

נסכם את הכול ונבנה טבלת איטרציות עבור שתי השיטות –

$n =$ מספר איטרציות	$N.R$ רגילה	$N.R$ משופרת
0	1	1
1	0.58198	0.1639
2	0.31906	$4.4 * 10^{-3}$
3	0.17	$\boxed{3.34 * 10^{-6}}$
4	0.09	
....	....	
16	$\boxed{1.91 * 10^{-6}}$	

■

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. חשב את הפתרונות של $f(x) = 0$ ודון בסדר ההתכנסות של שיטת $N.R$ <u>עבור כל השורשים</u>.

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי $x = -1$ פותר את המשוואה ולכן ניתן לרשום את $f(x)$ כך -

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

$$=> \ x_2, x_3 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} => x_2 = -2.732 \, , x_3 = 0.732$$

נציב בנוסחה האיטרטיבית של ניוטון-רפסון את הפונקציה שלנו –

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{3x^2 + 6x}$$

כעת אנו רוצים למצוא את סדר ההתכנסות של שלושת השורשים. ניזכר כי שיטת ניוטון-רפסון אכן שיטת נקודת שבת ולכן נוכל להשתמש במשפט הבא -

אם $\varphi(x)$ פונקציית נקודת השבת אז לשורש x_0 יש סדר התכנסות p אם –

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_0) = 0 \\ \varphi^{(p)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

תרגול 5

נחזור לתרגיל שלנו -

נגזור את φ ונבדוק מתי השורשים אינם מאפסים אותה –

$$\varphi'(x) = \cdots = (6x+6) * \frac{x^3+3x^2-2}{(3x^2+6x)^2}$$

ונציב –

$$\varphi(x_1 = -1) = 0$$

$$\varphi(x_2 = -2.732) = 0$$

$$\varphi(x_3 = 0.732) = 0$$

ולכן נגזור שוב –

$$\varphi''(x) = \cdots = \frac{4(x+1)(x^2+2x+4)}{3x^3(x+2)^3}$$

ונציב –

$$\varphi''(-1) = 0$$

$$\varphi''(-2.732) = 1.732 \neq 0$$

$$\varphi''(0.732) = -1.732 \neq 0$$

ולכן סדר ההתכנסות של x_2, x_3 הוא 2.

וכעת נגזור בשלישית –

$$\varphi^{(3)}(x) = \cdots = \frac{-4(x^4+4x^3+12x^2+16x+48)}{x^4(x+2)^4}$$

ונציב –

$$\varphi(-1) = -4 \neq 0$$

ולכן סדר ההתכנסות של $x_1 = -1$ הוא 3.

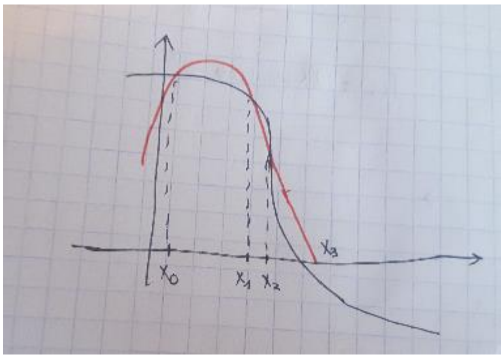
■

תרגול 5

21 יולי, 2016

שיטת מולר

בשיטה זו אנו בוחרים תחילה 3 נקודות ומעבירים ביניהם פרבולה (3 נקודות מגדירות פרבולה) והחיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x הינו הניחוש הבא. ניתן לראות זאת בתמונה הבאה –



$$\underbrace{p(x)}_{\text{פרבולה}} = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c$$

כאשר –

$$p(x_0) = f(x_0)\,, p(x_1) = f(x_1)\,, p(x_2) = f(x_2)$$

מכאן נקבל 3 נוסחאות עבור a, b, c:

$$\begin{cases} c = f(x_2) \\ a = \dfrac{\big(f(x_0)-f(x_2)\big)(x_1-x_2) - \big(f(x_1)-f(x_2)\big)(x_0-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)(x_0-x_1)} \\ b = \dfrac{\big(f(x_1)-f(x_2)\big)(x_0-x_2)^2 - \big(f(x_0)-f(x_2)\big)(x_1-x_2)^2}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)(x_0-x_1)} \end{cases}$$

כעת נרצה למצוא את החיתוך של הפרבולה עם ציר ה – x:

נסמן - $z = x - x_2$ ונקבל –

$$p(z) = az^2 + bz + c$$

$$=> z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=> z = x - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = x_2 + \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

וכעת נכפיל בצמוד –

$$x = x_2 + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} * \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

ולכן נקבל –

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + sign(b) * \sqrt{b^2 - 4ac}}}$$

לבסוף, איך נבחר איזו נקודות לקחת לפעם הבאה?

כמובן שניקח את x_3, ויחד אתו ניקח את שתי הנקודות שהכי קרובות אליו (באותו אופן ניתן להגיד שניקח את שתי הנקודות הכי קרובות לשורש מאחר ובכל צעד x_3 יותר קרוב לשורש במידה והיא מתכנסת).

<u>הערה:</u>

<u>יתרונות:</u>

- בהשוואה לשיטת $N.R$ לא צריך לחשב נגזרת.
- סדר ההתכנסות הוא $p = 1.84$.

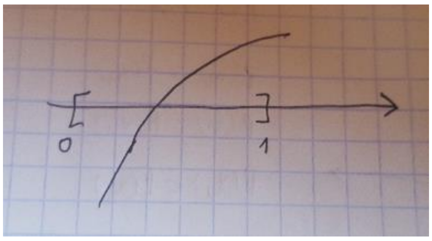
<u>חסרונות:</u>

- השיטה לא תמיד מתכנסת.

<u>תרגיל:</u>

נתונה הפונקציה - $f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$. חשבו את $f(x) = 0$ בשיטת מולר.

<u>פתרון:</u>



ניקח ניחוש התחלתי –

$$\begin{cases} \text{קרובות לשורש} - \begin{cases} x_2 = 0.5 \\ x_1 = 0 \end{cases} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

נחשב את מקדמי הפרבולה –

$$a = -1.076\,, b = 2.123\,, c = 0.330704$$

$$=> p(z) = -1.076z^2 + 2.123z + 0.330704$$

ולכן –

$$x_3 = 0.5 - \frac{2 * 0.330704}{2.123 + \underbrace{1}_{\text{חיובי } b} * \sqrt{2.123^2 - 4 * (-1.706) * 0.330704}} = 0.3549.$$

כעת מאחר ו - x_2, x_1 קרובות ל - x_3 (קרובות לשורש) אז ניקח אותן יחד עם x_3 ("נזרוק" את x_0) ונמשיך עם התהליך –

$$\begin{cases} \begin{cases} x_2 = 0.3549 \\ x_1 = 0.5 \end{cases} \text{– קרובות לשורש} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

נחשב שוב את מקדמי הפרבולה –

$$a = -0.808\,, b = 2.4918\,, c = -0.0138$$

נחשב את החיתוך עם ציר ה – x:

$$x_3 = 0.3549 - \frac{2 * (-0.0138)}{2.4918 + 1 * \sqrt{2.4918^2 - 4 * (-0.808) * (-0.0138)}} = 0.3604$$

ונקבל –

$$f(0.3604) = 0.0001$$

■