תרגול 12

9 ביולי 2013

ר"א (ריבוי אלגברי) ר"ג (ריבוי גאומטרי)

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ נניח ש$f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^e \cdot g(\lambda)$ כאשר $g(\lambda)$ לא מתחלק ב $(\lambda-\lambda_0)$ אזי

1. הר"א של λ_0 הוא e
2. הר"ג של λ_0 הוא $d = dimN(A-\lambda_0 I)$
3. משפט: $d \le e$

דוגמא: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ לכל המטריצות הללו יש $\lambda = 1$ ע"ע יחיד מריבוי אלגברי 3

הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 1$ של A_1 הוא 3, של A_2 הוא 2 ושל A_3 הוא 1 .

משפט: משפט: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה$\Leftrightarrow$ יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$ $\Leftrightarrow$ הריבוי הג"א =ר"א לכל ע"ע + לפולינום האופיני יש n שורשים .

! שימו לב לעובדה הזאת בסעיף הבא.

ליכסון א"ג

הגדרה: $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תקרא א"ג אם עמודתיה הן וקטורים א"נ.

פירוט: נסמן $P = (v_1, \ldots, v_n)$ כאשר $\{v_1, \ldots, v_n\}$א"נ.

אזי $PP^t = I$ (כי $(PP^t)_{i,j} =< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$)

בפרט $P^{-1} = P^t$ וגם $P^tP = I$.

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא תקרא לכסינה א"ג היא לכסינה בעזרת מטריצה א"ג.

(כלומר קיימת מטריצה Pא"ג כך ש $P^{-1}AP = D$ כאשר D אלכסונית. כיוון ש Pא"ג זה מתפרש בצורה $P^tAP = D$).

עובדות על מטריצה ממשית סימטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

1. קימיים לה תמיד n ע"ע וכולם ממשים
2. ו"ע של ע"ע שונים - ניצבים (כלומר $V_{\lambda_1} \subset (V_{\lambda_j})^\perp$ לכל $i \neq j$)
3. משפט: A סימטרית $\Leftrightarrow$ A לכסינה א"ג $\Leftrightarrow$ יש בסיס א"נ של ו"ע ל $\mathbb{R}^n$(+לפולינום האופיני יש nשורשים).

4. במקרה ש A סימטרית אזי הליכסון יתבצע בשלבים הבאים:

(א) נמצא ע"ע של A

(ב) לכל λ ע"ע נמצא בסיס א"נ ל V_λ בעזרת גרם שמידט (נסמן B_λ)

(ג) בגלל עובדה 2 נקבל $\bigcup_{\lambda \text{ eigenvalue}} B_\lambda$ בסיס א"נ ל $\mathbb{R}^n$ ואם נשים את הו"ע כעמודות של מטריצה P נקבל $P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

נעקוב אחרי העובדות הללו בעזרת התרגיל הבא:

תהא $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. לכסן א"ג את A.

פתרון: $f_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right| = (\lambda-3)[(\lambda-2)^2-1] = (\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+3) = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$

כלומר $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ ע"ע. נמצא ו"ע מתאימים: עבור $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} N(A-3I) &= N(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= span\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

עבור $\lambda_2 = 1$:

$$N(A-I) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = span\{v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

נעזר בגרם שמידט למצוא בסיס א"נ לכל אחד מהמרחבים העצמיים:

עבור $V_{\lambda_1=3}$:

כיוון ש v_1, v_2 כבר מאונכים נשאר לנרמל אותם $\{w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, w_2 = v_2\}$

עבור $V_{\lambda_2=1}$:

כיוון ש v_3 וקטור יחיד נשאר לנרמל אותו $\{w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3\}$

כעת בגלל שו"ע של ע"ע שונים מאונכים אזי w_3 מאונך ל w_1, w_2 ולכן $\{w_1, w_2, w_3\}$ בסיס א"נ של ו"ע.

נסמן $P = (w_1, w_2, w_3)$ ונקבל $P^{-1} = P^t$ ו $P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

פירוק SVD (SVD=singular value decompodition) (הכללה של פירוק א"ג)

טענה: תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $N(A^tA) = N(A)$.

הוכחה: ($\supset$) יהא $x \in N(A)$ אזי $Ax = 0 \Leftarrow A^tAx = 0 \Leftarrow x \in N(A^tA)$

($\subset$)יהא $x \in N(A^tA) \Leftarrow A^tAx = 0 \Leftarrow x^tA^tAx = 0$

$\Leftarrow x^tA^tAx = (Ax)^tAx = <Ax, Ax> = ||Ax||^2 \Leftarrow Ax = 0 \Leftarrow x \in N(A)$.

■

מסקנות:

1. $N(AA^t) = N(A^t)$ באותו אופן
2. $R(A^tA) = R(A)$
   הוכחה: $N(A^tA) = N(A) \Leftarrow R(A^tA) = N(A^tA)^\perp = N(A)^\perp = R(A)$
3. $R(AA^t) = R(A^t)$ באופן דומה
4. מסקנה $rank(A^tA) = rank(A) = rank(A^t) = rank(AA^t)$

מטרה: לפרק מטריצה ממשית כלשהיא ל $A = U\Sigma V^t$ כאשר V, U 2 מטריצות א"ג Σ בגודל של A .

סיפור ה SVD:

חלק א:

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אזי $A^tA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית (עם ע"ע חיובים) ולכן לכסינה א"ג.
2. יהיו $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ בסיס א"נ ל $N(A)$ ו- $\{v_1, \ldots, v_r\}$ בסיס א"נ ל $R(A)$ וביחד $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$בסיס א"נ של ל $\mathbb{R}^n$ (אפשרי כי $N(A)$ ניצב ל $R(A)$)
3. מהמסקנות לעיל נובע כי $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ בסיס ל $N(A^tA)$ (כי הוקטורים הללו נמצאים ב $N(A)$) ו- $\{v_1, \ldots, v_r\}$ בסיס ל $R(A^tA)$ מסיבות דומות.
4. $\Leftarrow$ לכל $r + 1 \le i \le n$ מתקיים $A^tAv_i = 0$ ולכן $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ ו"ע המתאימים לע"ע 0.
5. כיוון של- A^tA יש בסיס א"נ של ו"ע ל $\mathbb{R}^n$ אזי ניתן להשלים את $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$בעזרת $\{w_1, \ldots w_r\}$ ו"ע לבסיס.
6. כיוון שלכל $r \le i \le 1$ מתקיים $A^tAw_i = \lambda_i w_i$ ($\lambda_i \neq 0$) ו- w_i ניצב ל $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ (כי ו"ע ששיכים לע"ע שונים במטריצה סימטרית) אזי $\{w_1, \ldots w_r\}$ מהווים בסיס ל $R(A)$. בה"כ מלכתחילה בחרנו אותם כלומר כל $1 \le i \le r$ $v_i = w_i$
7. נסדר את הע"ע מהגדול לקטן $\lambda_1 \ge \lambda_2 \cdots \ge \lambda_n$בפרט לכל $r+1 \le i \le n$: $\lambda_i = 0$
8. מהמסקנות לעיל נובע כי $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ בסיס ל $N(A)$ (כי הוקטורים הללו נמצאים ב $N(A^tA)$) ו- $\{v_1, \ldots, v_r\}$ בסיס ל $R(A)$

   חלק ב:

9. נגדיר $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ לכל $1 \le i \le n$. עוד נגדיר לכל $1 \le i \le r$ $u_i = \frac{Av_i}{\mu_i}$
10. ישירות מהגדרה נובע כי $\{u_1, \ldots, u_r\}$ קבוצה א"נ שמוכלת ב $C(A)$ ולכן בסיס ל $C(A)$ לפי השלישי חינם (כי הגודל שלה r).

11. נשלים אותה לבסיס א"נ של $\mathbb{R}^m$ $\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_m\}$.

12. הקבוצה $\{u_{r+1},\dots,u_m\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$ משיקולי ניצבות ל $\{u_1,\dots,u_r\}$ ומימד $dimN(A^t)=m-r$.

חלק ג:

13. נגדיר $\mathbb{R}^{m\times n} \ni \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, $U=(u_1\dots u_m)$, $V=(v_1\dots v_n)$ (כיוון ש U,V א"נ $U^t=U^{-1},V^t=V^{-1}$)

14. נתבונן ב U^tAV - $U^tAV=U^t(Av_1\dots Av_n)$ ולכן

$$[U^tAV]_{ij}=<\frac{Av_i}{\mu_i},Av_j>=\frac{1}{\mu_i}v_i^tA^tAv_j=\frac{1}{\mu_i}v_i^t\lambda_jv_j=\frac{1}{\mu_i}\lambda_jv_i^tv_j=\begin{cases}\frac{\lambda_i}{\mu_i}=\mu_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

כלומר $U^tAV=\Sigma$

15. לסיכום $A=U\Sigma V^t$ כאשר $V\in\mathbb{R}^{n\times n},U\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 2 מטריצות א"נ $\Sigma\in\mathbb{R}^{m\times n}$ בגודל של A ומתקיים.

(א) $\{v_1,\dots,v_r\}$ בסיס א"נ ל $R(A)$

(ב) $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ בסיס א"נ ל $N(A)$

(ג) $\{u_1,\dots,u_r\}$ בסיס א"נ ל $C(A)$

(ד) $\{u_{r+1},\dots,u_m\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$

תרגיל:

תהא $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$. פרק את A בשיטת SVD

(נציין שקל לראות ש $rankA=1$ ולכן נצפה לע"ע אחד שונה מ- 0)

חלק א:

1. $$A^tA=\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-9\\-9&9\end{pmatrix}$$

2. $$f_{A^tA}(\lambda)=|\begin{pmatrix}\lambda-9&9\\9&\lambda-9\end{pmatrix}|=(\lambda-9)^2-81=\lambda(\lambda-18)$$
ולכן $\lambda_1=18\geq\lambda_2=0$ שני ע"ע

3. ו"ע: עבור $\lambda_1=18$
$$N(A^tA-18I)=N(\begin{pmatrix}-9&-9\\-9&-9\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=span(\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\})$$

נבחר ו"ע מנורמל $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ו"ע: עבור $\lambda_2 = 0$

$$N(A^tA - 0I) = N(\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\})$$

נבחר ו"ע מנורמל $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. נגדיר $V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

חלק ב:

5. נגדיר $\mu_1 = \sqrt{18},\ \mu_2 = 0$ ונגדיר

$$u_1 = \frac{Av_1}{\mu_1} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(זה וקטור מנורמל)

6. נשלים לבסיס א"נ ל $\mathbb{R}^3$ ע"י הוקטורים $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(במקרים יותר מסובכים כדאי להשתמש בגרם שמידט)

חלק ג:

7. נגדיר $U = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. מתקיים $A = U\Sigma V^t$. $UU^t = I_3,\ VV^t = I_2$ ומתקיים:

(א) $\{v_1\}$ בסיס א"נ ל $R(A)$

(ב) $\{v_2\}$ בסיס א"נ ל $N(A)$

(ג) $\{u_1\}$ בסיס א"נ ל $C(A)$

(ד) $\{u_2, u_3\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$

מטריצה חיובית

הגדרה: תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ סימטרית. Aתקרא חיובית (חיובית לחלוטין) אם לכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $< Av, v >= v^tAv \geq 0$ (מתקיים $< Av, v >= v^tAv > 0$).

משפט: A חיובית $\Leftrightarrow$ כל ע"ע ≥ 0

הוכחה: $(\Leftarrow)$ יהא λע"ע $Av = \lambda v \Leftarrow 0 \leq v^tAv = \lambda v^tv = \lambda||v||^2 \Leftarrow 0 \leq \lambda$

$(\Rightarrow)$ יהיו $\{v_1, \dots v_n\}$ בסיס א"נ של ו"ע. יהיה $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$Av = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Av_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_i v_i$ ולכן כיוון שכל ע"ע גדולים שווים 0 מתקיים:

$$< Av, v >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i < v_i, v_i >= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i ||v_i||^2 \geq 0$$

הערה: באותו אופן מוכיחים A חיובית לחלוטין $\Leftrightarrow$ כל ע"ע $0 <$

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ראינו שע"ע שלה הם $1, 3$ ולכן A חיובית לחלוטין.