1808-13

הרצאה 13

תזכורת - $\sigma \in S_n$ תמורה: $\sigma:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$
חח"ע ועל

- כתיב תמורה כמכפלה של מחזורים זרים

$$(1\ 4\ 2)(3\ 5\ 7)(6\ 8) \in S_8$$

- כתיב תמורה כמכפלה של עגילים

- סימן של תמורה:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \sigma_{i,j}$$

$$\sigma_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \sigma(i)<\sigma(j) \\ -1 & , \sigma(i)>\sigma(j) \end{cases}$$

- $\operatorname{sign}(\underbrace{\sigma\tau}_{\text{הרכבה של תמורות}}) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$

- מסקנה: $\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)$

הוכחה: $1 = \operatorname{sign}(\underbrace{\sigma\sigma^{-1}}_{id}) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\sigma^{-1})$

- חילוף: $\operatorname{sign}(i\ j) = -1$

$\operatorname{sign}(\sigma(i\ j)) = \ \operatorname{sign}(\sigma)$

$\mathrm{sign}(\sigma \circ (i\ j)) = -\mathrm{sign}(\sigma)$

<u>דטרמיננט: של מט' $n \times n$:</u>

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

דוגמה - $\det(I) = ?$

כי אם תמורה σ כך ש- $\sigma(i) \neq i$, מקיים:

$a_{i,\sigma(i)} = 0$ (במט' I)

לכן "שורדת" רק התמורה id ולכן נקבל 1.

<u>תכונות הדטרמיננטה:</u>

<u>טענה:</u> אם ב-A יש שורת אפסים אז: $\det(A) = 0$.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $R_i(A) = 0$. מכאן שלכל $\sigma \in S_n$:

ולכן $a_{i,\sigma(i)} = 0$

המכפלה המתאימה לתמורה σ מתאפסת.

סה"כ:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} 0 = 0.$$ מ.ש.ל.

<u>טענה:</u> אם ב-A יש שתי שורות זהות אזי:
$\det(A)=0$.

<u>הוכחה:</u> נניח כי $R_i(A)=R_j(A)$ $(i<j)$:
$a_{i,k}=a_{j,k} \quad \forall\, 1\leq k\leq n$.

נגדיר פונקציה $f: S_n \longrightarrow S_n$
$f(\sigma)=\sigma\cdot(i\ j) =: \hat{\sigma}$

דוגמה: $f((i\ j))=id$

פונקציה זו חח"ע ועל. <u>חח"ע:</u>

נניח: $\hat{\sigma}=\hat{\tau}$

אזי: $\sigma(i\ j)=\tau(i\ j)$

נכפיל ב-$(i\ j)$:

$$\sigma\underbrace{(i\ j)(i\ j)}_{=id}=\tau\underbrace{(i\ j)(i\ j)}_{=id}$$

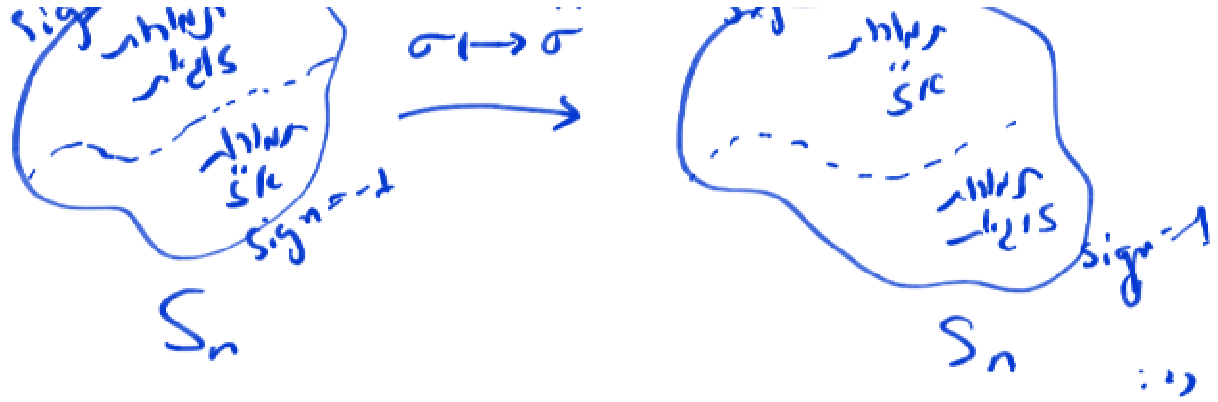
$\sigma=\tau$.

<u>על:</u> יהי $\sigma\in S_n$. נניח: $\tau:=\sigma(i\ j)$, אזי:

$\hat{\tau}=\sigma(i\ j)(i\ j)=\sigma\cdot id=\sigma$.

הערה:

$$((i\ j)(i\ j))(k)=\begin{cases} k, & k\neq i,j \\ i, & k=i \\ j, & k=j \end{cases}$$



כי:

$$\text{sign}(\hat{\sigma}) = \text{sign}(\sigma(i\ j)) = \text{sign}(\sigma)\cdot \underbrace{\text{sign}(i\ j)}_{-1} =$$

$$= -\text{sign}(\sigma)$$

כעת נפנה לחישוב הדטרמיננטה של A:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\sigma \\ \text{זוגית}}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}_{E} - \underbrace{\sum_{\substack{\tau \\ \text{א״ז}}} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}}_{O}$$

כי: $R_i = R_j$

$$\boxed{E} = \sum_{\substack{\sigma \\ \text{זוגית}}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{j,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \\ \text{זוגית}}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

[illegible] סדר הכפל

$$= \sum_{\substack{\sigma \\ \text{זוגית}}} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \text{ זוגית}} a_{1,\hat\sigma(1)} \cdots \underbrace{a_{i,\hat\sigma(i)}}_{\sigma(j)} \cdots \underbrace{a_{j,\hat\sigma(j)}}_{\sigma(i)} \cdots a_{n,\hat\sigma(n)} =$$

כי:

$$\left[\begin{array}{ll} \hat\sigma(k) = \sigma(k) & \forall\ k \neq i,j \\ \hat\sigma(i) = (\sigma(i\ j))_{(i)} = \sigma(j) & \\ \hat\sigma(j) = (\sigma(i\ j))_{(j)} = \sigma(i) & \end{array}\right]$$

$$= \sum_{\sigma \text{ זוגית}} a_{1,\hat\sigma(1)} \cdots a_{n,\hat\sigma(n)} =$$

ראינו כי:

$$\{\hat\sigma \mid \sigma \text{ זוגית}\} = \{\tau \text{ תמורה אי-זוגית}\}$$

כי f חח"ע ועל

$$= \sum_{\tau \text{ אי-זוגית}} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} = \boxed{\theta}$$

ולכן:

$$\det(A) = E - \theta = 0$$

כנדרש.

מ.ש.ל.

נפנה לגילוי האפקט של פעולה שורה אלמנטרית על הדטרמיננטה:

טענה: (הומוגניות)

תהא ρ פעולת כפל השורה ה-i-ית בסקלר $0 \neq \lambda$. אזי:

$$\det(\underbrace{\rho(A)}_{B}) = \lambda \det(A)$$

__הוכחה:__

$$\det(\rho(A)) = \det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)} =$$

$$\left.\begin{array}{ll} b_{j,\sigma(j)} = a_{j,\sigma(j)} & :j\neq i \text{ ל-} \\ b_{i,\sigma(i)} = \lambda a_{i,\sigma(i)} & :i \text{ ל-} \end{array}\right\}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots (\lambda a_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \lambda \cdot \det(A)$$

מ.ש.ל.

__מסקנה:__ יהי $\lambda \neq 0$. אזי: $(A \in M_n(F))$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

__הוכחה:__ ביצענו n פעולות שורה כפי שעשינו (הכפלנו כל שורה ב-λ).

מ.ש.ל.

__(אלטרנטיביות)__

__טענה:__ תהי ρ פעולת החלפת שורות i, j $(i<j)$.
אזי:

$$\det(\underbrace{\rho(A)}_{B}) = -\det(A).$$

__הוכחה:__

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{i,\sigma(i)} \cdots b_{j,\sigma(j)} \cdots b_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots\cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{1,\sigma(1)} \cdots\cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots\cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}} =$$

$\hat{\sigma}(k) = \sigma(k)$ $: k \neq i,j$ לכל

$\hat{\sigma}(i) = \sigma(j)$ $: i$ עבור

$\hat{\sigma}(j) = \sigma(i)$ $: j$ עבור

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\hat{\sigma}(1)} \cdots a_{i,\hat{\sigma}(i)} \cdots a_{j,\hat{\sigma}(j)} \cdots a_{n,\hat{\sigma}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} -\operatorname{sign}(\hat{\sigma}) \cdot a_{1,\hat{\sigma}(1)} \cdots a_{n,\hat{\sigma}(n)} =$$

$\{\sigma \mid \text{תמורה } \sigma\} = \{\hat{\sigma} \mid \text{תמורה } \hat{\sigma}\}$

$$= -\sum_{\hat{\sigma} \in S_n} \operatorname{sign}(\hat{\sigma}) \cdot a_{1,\hat{\sigma}(1)} \cdots a_{n,\hat{\sigma}(n)} = -\underline{\det(A)}$$

מ.ש.ל.

<u>מולטילינאריות</u>

<u>טענה</u>: נניח:

$$A = \begin{bmatrix} — R_1 — \\ \vdots \\ — R_n — \end{bmatrix}$$

תהא R_i' שורה חדשה, ונגדיר:

$$B = \begin{bmatrix} — R_1 — \\ \vdots \\ — R_i + R_i' — \\ \vdots \\ — R_n — \end{bmatrix} \quad , \quad A' = \begin{bmatrix} — R_1 — \\ \vdots \\ — R_i' — \\ \vdots \\ — R_n — \end{bmatrix}$$

אז:

$$\det(B) = \det(A) + \det(A').$$

<u>הוכחה:</u>

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdots \underbrace{b_{i,\sigma(i)}}_{\substack{\shortparallel \\ a_{i,\sigma(i)} + a'_{i,\sigma(i)}}} \cdots b_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots \left(a_{i,\sigma(i)} + a'_{i,\sigma(i)}\right) \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \overbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}^{\det(A)} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}_{\det(A')} =$$

$a_{1,\sigma(1)} = a'_{1,\sigma(1)}$, $a_{n,\sigma(n)} = a'_{n,\sigma(n)}$

בכל שורה $\neq R_i$ המט' A, A' שווה

$$a'_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a'_{n,\sigma(n)}$$

$$= \det(A) + \det(A).$$

מ.ש.ל.

מסקנה: יהי ρ הפעולה:

$$R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j \qquad (\alpha \in \mathbb{F})$$

אזי: $\det(\rho(A)) = \det(A)$.

הוכחה: מהתכונות שלנו (מולטי-לינאריות):

$$\det(\rho(A)) = \det \underbrace{\begin{bmatrix} - & R_1 & - \\ & \vdots & \\ - & R_i + \alpha R_j & - \\ & \vdots & \\ - & R_n & - \end{bmatrix}}_{\rho(A)} =$$

$$= \det \underbrace{\begin{bmatrix} - & R_1 & - \\ & \vdots & \\ - & R_i & - \\ & \vdots & \\ - & R_n & - \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} - & R_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha R_j & - \\ & \vdots & \\ - & R_n & - \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}}_{\|}$$

$$\alpha \cdot \det \begin{bmatrix} - & R_1 & - \\ & \vdots & \\ - & R_j & - \\ & \vdots & \\ - & R_j & - \\ - & R_n & - \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{array}$$

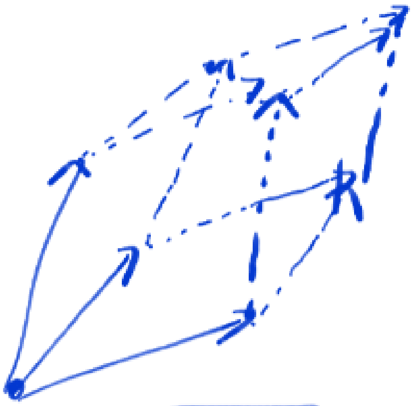
כי יש שורות זהות $\Leftarrow$ $\det = 0$

לכן: $\det(\rho(A)) = \det(A)$, כנדרש.

מ.ש.ל.

משפט: הפונקציה det היא הפונקציה היחידה המקיימת:

הומוגנית (כפל בסקלר) , אלטרנטיבית (החלפת שורה) , מולטי-לינאריות



כך ש- $\det(I)=1$.

לזו נלוית קליס הבנה =

משפט: $\boxed{A \text{ הפיכה} \iff \det(A)\neq 0}$

הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח A הפיכה, נדרג אותה לצ' רצויה:

$$\rho_t \cdots \rho_1(A) = I$$

נניח בשלילה כי $\det(A)=0$. ראינו שהפעלת של ד כפלו~ שנה את הדט:

- כפל בסקלר $\neq 0$ (כפל בסקלר)
- כפל ב -1 (החלפת שורה)
- לא משפיע (חיבור שורה)

(*)

ולכן אם $\det(A)=0$ אז גם:

$$\det(\rho_1(A))=0$$
$$\det(\rho_2\rho_1(A))=0$$
$$\vdots$$

$$1 = \det(\underbrace{\rho_t \cdots \rho_1(A)}_{I}) = 0$$

סתירה.

$(\rightarrow)$ נניח ש $\det(A) \neq 0$ ונניח בשלילה כי A לא הפיכה.
נדרג את A לצורה קנונית:

$$\rho_t \cdots \rho_1(A) = \begin{bmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

מלמה שראינו:

$$\det(\rho_t \cdots \rho_1(A)) = 0$$

אבל כבר אמרנו שפעולות שורה לא הופכות דט' $\neq 0$
ל-0 $(*)$, ובזאת סתירה.

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> ניתן לחשב דטרמיננטות ע"י דירוג וצבירת
האפקטים של פעולות השורה על הדט':

דוגמה -

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3]{R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow -R_3]{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן: $1 = \det(I) = (-1)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\det(A)$

לכן: $\det(A) = 4$.

<u>הערה:</u> אם A משולשית עליונה/תחתונה אז $\det(A)$ הוא מכפלת איברי האלכסון.

<u>הוכחה:</u>

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} =$$

הוספת כפולת שורה

$$= \lambda_1 \cdots \lambda_n \cdot \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \cdots \lambda_n .$$

דומה למשולשית תחתונה.

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> $\det(A^T) = \det(A)$.

<u>הוכחה:</u>

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot (A^T)_{1,\sigma(1)} \cdots (A^T)_{n,\sigma(n)} =$$

$$((A^T)_{i,j} = a_{j,i})$$

$$= \sum \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, \underbrace{a_{\sigma(1),1}}_{\substack{\text{k} \\ \sigma^{-1}(k)}}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

אפשר לשנות סדר המכפלה.

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \mathrm{sign}(\sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$$

לכל σ יש תמורה הפוכה אחת σ^{-1} היא תמורה, G היא תמורה אחת ויחידה

$$= \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sign}(\tau)\, a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)} =$$

$$= \det(A).$$

מ.ש.ל.

<u>משפט</u> (כפליות):

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

<u>הוכחה:</u> ראשית, אם A או B לא הפיכות, סיימנו! כי אז גם AB לא הפיכה, ולכן ממשפט קודם:

$$\det(AB) = 0 = \underbrace{\det(A)\det(B)}_{\text{אחד מהם } 0}.$$

נניח, אז מעתה כי A,B הפיכות.

בפרט, ניתן לדרגן למט' הזהות:

$$\rho_t\cdots\rho_1(A)=I \qquad t \text{ צעדים}$$

$$\rho'_s\cdots\rho'_1(B)=I \qquad s \text{ צעדים}$$

נוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה על $n=t+s$.

$\underline{n=0}$. $A=B=I$, לכן $AB=I$ ומתקיים:

$$\det(AB)=1=1\cdot 1=\det(A)\det(B).$$

$\underline{n+1}$ (מניחים את נכונות הטענה לכל $t+s=m\leq n$).

$t+s=n+1$. בה"כ, $t\geq 1$. נתבונן בזוג:

$$\rho_1(A),\quad B$$

$\rho_1(A)$: לכל היותר $t-1$ צעדים לדירוג ל-I $(\rho_t\cdots\rho_2)$

B: s צעדים לדירוג ל-I

זהו זוג המקיים את הנחת האינדוקציה שכן:

$$(t-1)+s\leq n$$

מכאן לפי הנחת האינדוקציה:

$$\det(\rho_1(A)B)=\underline{\det(\rho_1(A))\cdot\det(B)}$$

ראינו קודם $\rightarrow$ $\parallel$

$$\det\left(\rho_1(I)\cdot AB\right) = \det\left(\rho_1(AB)\right)$$

ולכן, $\rho(A)=\rho(I)\cdot A$.

נחלק למקרים:

(1) ρ_1 פעולת כפל שורה בסקלר $\neq 0$:

$$(*) \Rightarrow (\lambda \det A)\cdot \det B = \lambda \det AB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det A \cdot \det B = \det AB$$

(2) ρ_1 פעולת החלפת שורות:

$$(*) \Rightarrow (-\det A)\cdot \det B = -\det AB \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det A \cdot \det B = \det AB$$

(3) ρ_1 פעולת הוספת כפולת שורה לאחרת:

$$(*) \Rightarrow \det A \cdot \det B = \det AB$$

הוכחנו את שלב האינדוקציה.

לכן:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

מ.ש.ל.

<u>מסקנה</u>: פעולת עמודה פועלת אימפקט זהה לשל פעולת שורה.

כרגע, החלפה עמודות i,j:

נסמן ב- ρ החלפה שורות i,j:

$$B = \left(\rho(A^T)\right)^T = \left(\rho(I)\cdot A^T\right)^T =$$

$$= (A^T)^T\cdot \rho(I)^T = A\cdot \rho(I)^T$$

ולכן

$$|B| = |A\cdot\rho(I)^T| =$$

$$= |A|\cdot|\rho(I)^T| = |A|\cdot\underbrace{|\rho(I)|}_{-1}$$

מסקנה: אם A,B דומות אזי $|A| = |B|$.

הוכחה: קיימת P הפיכה כך ש- $A = PBP^{-1}$

כרגע:

$$|A| = |PBP^{-1}| = |P|\cdot|B|\cdot|P^{-1}|$$

נוכיח כי: $|P^{-1}| = |P|^{-1}$:

$$|I| = |PP^{-1}| = |P|\cdot|P^{-1}| \Rightarrow |P^{-1}| = |P|^{-1}$$

$$|I| = 1$$

ולכן:

$$|A| = |P|\,|P|^{-1}\,|B|$$

$$|A| = \underbrace{\cancel{|P|\cdot|P|}}_{1} \cdot |B| .$$

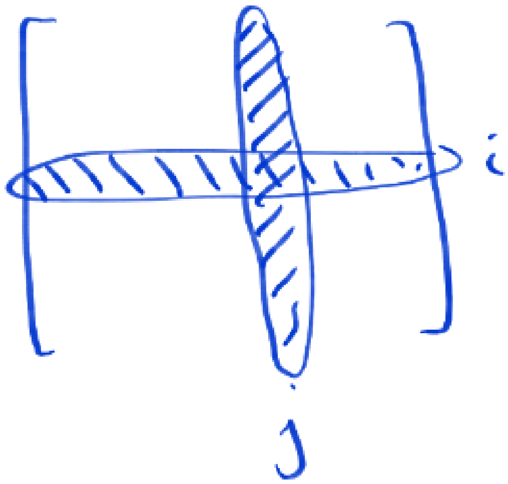
מ.ש.ל.

11^{00}

מינורים

הגדרה: תהי A מטריצה $n\times n$, נגדיר את המינור ה-ij של A

מסמנים גם: (A_{ij}) $\quad M_{ij}(A) =$



מט' $(n-1)\times(n-1)$.

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{23}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

משפט (פיתוח לפי מינור): תהי A מט' ריבועית $n\times n$.

אזי:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot |M_{ij}(A)|$$

כאשר $\underline{1 \le i \le n}$ כרצונך. (פיתוח לפי השורה ה-i.)

למשל:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad i=1$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot |M_{1j}(A)| =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} |M_{11}(A)| + (-1)^{1+2} a_{12} |M_{12}(A)| + (-1)^{1+3} a_{13} |M_{13}(A)| =$$

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3 - 20 = -17 \qquad 2 - 0 = 2 \qquad 10 - 0 = 10$$

$$|A| = \underbrace{1}_{a_{11}} \cdot (-17) + (-1) \cdot \underbrace{0}_{a_{12}} (2) + \underbrace{(-1)}_{a_{13}} \cdot 10 =$$

$$= \underline{-27}.$$

הוכחה:

$$A=\begin{bmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{bmatrix} \leftarrow R_i$$

$$|A|=\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix} \underset{\text{מולטילינאריות}}{=}$$

$$=\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ a_{i1}\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ 0\ a_{i2}\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0\ a_{in} \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}=$$

$$=a_{i1}\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ 1\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}+a_{i2}\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ 0\ 1\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}+\cdots+a_{in}\begin{vmatrix} — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0\ 1 \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}$$

(כלומר נבצע $i-1$ החלפות שורה: ($i\leftrightarrow i-1,\ i-1\leftrightarrow i-2,\ \ldots,\ 2\leftrightarrow 1$

$$=(-1)^{i-1}a_{i1}\underbrace{\begin{vmatrix} 1\ 0 & \cdots & 0 \\ — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}}_{\text{ללא החלפות}}\ \underbrace{+}_{\substack{\text{החלפה שמבצע:}\\ 1\leftrightarrow 2}}\cdots+(-1)^{i-1}a_{in}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0\ 1 \\ — & R_1 & — \\ & \vdots & \\ — & R_n & — \end{vmatrix}}_{\substack{\text{החלפות שמבצע:}\\ n\leftrightarrow n-1\\ n-1\leftrightarrow n-2\\ \vdots}}$$

ללא השורה ה-i

ללא השורה ה-i

$2 \Leftrightarrow 1$

נבצע $j-1$ החלפת עמודה במחובר ה-j-י בסכום הנ"ל:

$$= (-1)^{i-1} a_{i1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & R_1 & & \\ & \vdots & & \\ & R_n & & \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i-1+n-1} a_{in} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & R_1 & \\ & & \vdots & \\ & & R_n & \end{vmatrix}$$

העמודה ה-n-ית

כל העמודות פרט לעמודה ה-n-ית לפי הסדר

נתבונן במחובר ה-j-י:

$$(-1)^{i-1+\overbrace{j-1}^{\text{החלפת עמודה}}} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & R_1 & \\ & & \vdots & \\ & & R_n & \end{vmatrix}$$

העמודה ה-j-ית

כל העמודות פרט לעמודה ה-j-ית לפי הסדר

נתבונן בדטרמיננטה הנ"ל. למה היא שווה?
לפי הגדרת הדטרמיננטה, נקבל שכל התמורות יתאפסו פרט לתמורות שבהן $\sigma(1)=1$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & R_1 & \\ & & \vdots & \\ & & R_n & \end{vmatrix} \Bigg\} \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \text{sign}(\sigma)\cdot(\cdots)$$

$\|$

- ללא שורה i
ללא עמודה j

$$|M_{ij}(A)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\overbrace{i-1+j-1}^{i+j}} a_{ij} \left| M_{ij}(A) \right|$$

כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: בדומה, ניתן לפתח דטרמיננטה לפי <u>עמודה</u>:

בהינתן $1 \le j \le n$ כרצוני:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left| M_{ij}(A) \right|$$

רצים על השורות והעמודה קבועה $= j$.

ניתן להוכיח בדומה לפיתוח שורה, או עפ״י A^T.

<u>דוגמה</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I <u>פיתוח לפי שורה 1</u>:

$$|A| = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} a_{1j} \, |M_{1j}| =$$

$$= a_{11} \cdot |M_{11}| - \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{a_{12}} \cdot |M_{12}| + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{a_{13}} |M_{13}| - a_{14} |M_{14}| =$$

$$= \underbrace{a_{11}}_{1} |M_{11}| - \underbrace{a_{14}}_{-2} |M_{14}|$$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{-1} + 0 \cdots =$$

לפי שורה 1

$$= -3 + 1 = -2$$

$$|M_{14}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + 0 \cdots =$$

לפי שורה 1

$$= 2 + 3 = 5$$

סה״כ:

$$|A| = 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 5 = 8$$

II לפי עמודה 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{3+3}\cdot \underbrace{1}_{a_{33}} |M_{33}(A)| + (-1)^{3+4}\cdot \underbrace{1}_{a_{43}} |M_{43}(A)| =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{לפי עמוד' 2:}} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$\underbrace{(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{5}}_{5} \qquad \underbrace{1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{1} + (-1)\cdot 0 \cdots + (-2)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{2}}_{-3}$$

$$|A| = 5-(-3) = 8$$

אחלה דרך ☺.

<u>דוגמה</u>: מצאו לאלו ערכי $t\in\mathbb{C}$ המט׳:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ הפיכה?

נזכר הפיכות: מדרגות — ודרך אם $\det\neq 0$.

נפתח לפי שורה 1:

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ t & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} t \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & t & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{} =$$

מט' לא הפיכה
כי השורות 2,1 תל'
ולכן הדט' $= 0$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ t & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + (t+1) = t+2$$

ולכן A_t הפיכה אמ"ם $t \neq -2$.

המטריצה הנלווית
(Adjoint / adjugate matrix)

הגדרה. תהא A מט' $n \times n$. נגדיר:

$$(\operatorname{adj}(A))_{ij} := (-1)^{i+j} \left| M_{ji}(A) \right|$$

שימו לב לסדר!

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

נחשב מט' צמודה:

$$\operatorname{adj}A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

משפט: תהא A מט' ריבועית. אזי:

$$A\cdot \operatorname{adj}(A)=\operatorname{adj}(A)\cdot A=\underbrace{|A|\cdot I}_{\text{מט' סקלרית}}$$

$$\begin{pmatrix}|A| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |A|\end{pmatrix}$$

הוכחה: נחשב את כניסות המטריצה:

$$\left(A\cdot \operatorname{adj}(A)\right)_{ij}=?$$

אם $i=j$: לפי הגדרת כפל מט':

$$(A\cdot adj(A))_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\cdot (adj(A))_{k,i} \overset{\text{הגדרת } adj}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\cdot (-1)^{i+k}\cdot |M_{i,k}(A)| = |A|$$

פיתוח דט' A לפי שורה i

אם $i\neq j$: לפי הגדרת כפל מט':

$$(A\cdot adj(A))_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\cdot (adj(A))_{k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\cdot (-1)^{j+k}\cdot |M_{j,k}(A)| = (*)$$

נגדיר מט' חדשה:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} — & R_1(A) & — \\ & \vdots & \\ — & R_i(A) & — \\ & \vdots & \\ — & R_i(A) & — \\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & — \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

כל השורות כמו של A, אלא שהשורה ה-j-ית היא גם השורה ה-i-ית של A.

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} B_{j,k}(-1)^{j+k} \cdot |M_{j,k}(A)| =$$

כי: $A_{i,k}=B_{j,k}$

כי למעט השורה ה-j-ית שמורידים במינור הנ"ל, המט' A,B שוות

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} B_{j,k} \cdot |M_{j,k}(B)| =$$

פיתוח לפי השורה ה-j

$$= |B| = 0$$

יש בה שתי שורות שוות.

(בדומה מראים כי $adj(A)\cdot A=|A|\cdot I$.)

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> ניתן לחשב מט' הופכית ללא דירוג:

(אם A הפיכה)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$$

הוכחה:

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)\right) = \frac{1}{|A|} \cdot \underbrace{A \cdot adj(A)}_{|A|\cdot I} = I$$

מסקנה:

$$\frac{1}{|A|} \cdot adj(A) = A^{-1}$$

מ.ש.ל.

מה קורה כאשר A לא הפיכה?

$$A\cdot adj(A)=adj(A)\cdot A=0.$$

ניגש לדוגמה הקודמת:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&2\end{pmatrix},\quad adj(A)=\begin{pmatrix}-2&-4&2\\2&2&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$$

נחשב את המכפלה:

$$A\cdot adj(A)=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-4&2\\2&2&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2\cdot I$$

ובדומה גם בכיוון ההפוך $adj(A)\cdot A$.

נחשב את A^{-1} בשתי דרכים:

1. דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&2&1&1&1&0\\0&2&2&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&2&1&1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&1/2&1/2&1/2&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)\to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאנו שוב, לפי adj:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

אותו הדבר, כצפוי.

<u>הערה</u>: $A \cdot \mathrm{adj}(A) = |A| \cdot I$

הדטרמיננטה של צד ימין:

$$|A|^n$$

הדטרמיננטה של צד שמאל:

$$|A| \cdot |\mathrm{adj}(A)|$$

אם A לא הפיכה אז גם $\mathrm{adj}(A)$ לא הפיכה

(כי $A\cdot adj(A)=0$) ולכן $|adj(A)|=0$.

ולכן, בסה"כ:

$$\underline{|adj(A)|=|A|^{n-1}}.$$