מבחן מועד א' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 11/07/21

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(2x)\sin(x)}{(1-\sin(x))\ln(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\cos(2x)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\sin(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}}_{\to 1}\cdot\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}=-1$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1}=-1$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^4-x^4-4x^3}{x^2+1}$$

ראשית נשים לב כי ממבט ראשון לא ניתן לקבוע לאן המונה שואף, ולכן אי אפשר להשתמש ישירות בכלל לופיטל.

למקרה שאנחנו לא זוכרים את הבינום של ניוטון נפתח

$$((x+1)^2)^2=(x^2+2x+1)^2=x^4+2x^3+x^2+2x^3+4x^2+2x+x^2+2x+1=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$$

לכן

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^4-x^4-4x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2+4x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{6+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=6$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$

נחשב את גבול המנה

$$\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)^{n+1}}\cdot n^n=\underbrace{(n+1)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{\to\frac{1}{e}}=\infty$$

כיוון שגבול המנה גדול מ1, הסדרה המקורית שואפת לאינסוף.

.2

א. חשבו את $\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}\,dx$.

אמנם ניתן לפתור את האינטגרל לפי האלגוריתם לאינטגרל על פונקציה רציונאלית, אך נבצע כאן טריק קטן.

$$\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx=\int\frac{3x^2+1}{x^3+x}dx-\int\frac{x^2}{x^3+x}dx=\ln|x^3+x|-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln|x^3+x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty\left(\sqrt[x]{e}-1\right)dx$.

נבצע השוואה עם $\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$

$$\frac{\sqrt[x]{e}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{x\to\infty}1$$

לכן האינטגרלים חברים, וכיוון שהאינטגרל איתו השווינו מתבדר, כך גם התרגיל בשאלה מתבדר.

.3

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x=x$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x)=e^x-x$$

$$h'(x)=e^x-1$$

עבור $x\le 0$ מתקיים כי $h'(x)\le 0$ ועבור $x\ge 0$ מתקיים כי $h'(x)\ge 0$

לכן לכל $x<0$ מתקיים כי $h(x)>h(0)$ (הפונקציה יורדת) ולכל $x>0$ מתקיים כי $h(x)>h(0)$ (הפונקציה עולה).

כעת, $h(0)=1$ ולכן הערך המינימלי של h הוא 1, והפונקציה אינה מתאפסת ולמשוואה אין כלל פתרון.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $2e^{(x^2)} = x^4$, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$t(x) = 2e^{x^2} - x^4$$

$$t'(x) = 4xe^{x^2} - 4x^3 = 4x(e^{(x^2)} - x^2)$$

נשים לב כי עבור $h(x) = e^x - x$, מתקיים מהסעיף הקודם כי $h(x) \geq 1$

לכן בפרט

$$h(x^2) = e^{(x^2)} - x^2 \geq 1$$

ולכן לכל $x \geq 0$ מתקיים כי $t'(x) \geq 0$ ולכל $x \leq 0$ מתקיים כי $t'(x) \leq 0$

כלומר לכל $x > 0$ מתקיים כי $t(x) > t(0)$ (הפונקציה עולה) ולכל $x < 0$ מתקיים כי $t(x) > t(0)$ (הפונקציה יורדת).

לכן הערך המינימלי של $t(x)$ הוא $t(0) = 2$, ושוב הפונקציה אינה מתאפסת ולכן למשוואה המקורית אין פתרון.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, שיש לה חיתוך יחיד עם כל ישר מהצורה $y = x + b$

א. הוכיחו או הפריכו: f חח"ע (כלומר לכל $x_1 \neq x_2$ מתקיים כי $f(x_1) \neq f(x_2)$).

<u>הפרכה</u>:

ניקח את הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$ שבוודאי אינה חח"ע.

לכל $y = x + b$ יש חיתוך יחיד עם $f(x) = 0$ בנקודה $x = -b$

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) \leq 1$.

<u>הפרכה</u>:

ניקח את הישר $f(x) = 2x$ עבורו מתקיים כי $f'(x) = 2 > 1$

לכל b הפתרון היחיד למשוואה $2x = x + b$ הוא $x = b$ ולכן יש חיתוך יחיד כפי שנדרש.

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ לכל $n \in \mathbb{N}$, וכן $a_1 = 0$.

א. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n = \frac{n-1}{n}$.

נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 1$ אכן $a_1 = \frac{1-1}{1} = 0$ לפי הנתון

יהי n עבורו $a_n = \frac{n-1}{n}$ אזי $a_{n+1} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2-1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

כפי שרצינו.

ב. חשבו את גבול הסדרה.

$$\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}\to 1$$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}$$

נשים לב כי

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}\frac{2}{1+\frac{k}{n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}\frac{2}{1+2\frac{k}{2n}}$$

כלומר $a_n=b_{2n}$ כאשר

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{2}{1+2\frac{k}{n}}$$

ולכן אם נחשב את הגבול של הסדרה b_n בוודאי הסדרה המקורית a_n תשאף לאותו הגבול.

אבל b_n זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x)=\frac{2}{1+2x}$ וכיוון שפונקציה זו רציפה בקטע $[0,1]$ לפי המשפט שלמדנו

$$b_n\to\int_0^1\frac{2}{1+2x}dx=[\ln|1+2x|]_0^1=\ln(3)$$

ולכן גם $a_n\to\ln(3)$

ב. הוכיחו כי $\left|\cos(\sqrt{2})-\frac{1}{6}\right|\leq\frac{\sqrt{2}}{30}$

נחשב פולינום טיילור של $\cos(x)$ מסדר 4 סביב 0

$$P_4(\cos(x),0)(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}$$

נציב בו $x=\sqrt{2}$ ונקבל

$$P_4(\sqrt{2})=1-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}+\frac{(\sqrt{2})^4}{4!}=\frac{4}{4!}=\frac{1}{6}$$

קיבלנו בדיוק את הקירוב שמופיע בשאלה, ונותר לחסום את השגיאה בלבד.

(בקירוב ע"י טיילור מסדר נמוך יותר מקבלים אפס ולא שישית.)

כעת נחשב את השארית לפי לגראנז'

$$R_4(\cos(x)\,,0)\left(\sqrt{2}\right)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}\left(\sqrt{2}-0\right)^5$$

כיוון שכל הנגזרות הם פלוס או מינוס סינוס או קוסינוס, נקבל כי

$$\left|\cos\left(\sqrt{2}\right)-\frac{1}{6}\right|=|R_4|\leq\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{5!}=\frac{4\sqrt{2}}{5!}=\frac{\sqrt{2}}{30}$$