פתרון תרגיל בית 5 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. מצאו את כל הקוסטים ב-$\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle$. מהו האינדקס של תת-החבורה?

פתרון. האיבר 3 הוא מסדר 10, ולכן $|\langle 3\rangle| = 10$. לפי משפט לגראנז' נקבל

$$|\mathbb{Z}_{30}/\langle 3\rangle| = \frac{|\mathbb{Z}_{30}|}{|\langle 3\rangle|} = \frac{30}{10} = 3$$

כלומר מספר הקוסטים שהוא האינדקס שווה ל-3, והקוסטים הם כמובן: $\{\langle 3\rangle, 1+\langle 3\rangle, 2+\langle 3\rangle\}$ (עד כדי בחירת נציגים).

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה $H,K \le G$ תת־חבורות סופיות שלה.

א. הוכיחו שאם $|H| = 77, |K| = 1000$, אז $H\cap K = \{e\}$.

ב. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$ וגם $H \ne K$, אז $H\cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. ידוע לנו כי $H\cap K$ היא תת־חבורה של H ושל K. לכן לפי משפט לגראנז' מתקיים כי $|H\cap K|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$. אך לפי הנתון, המספר היחיד שמחלק גם את$|H|$ וגם את$|K|$ הוא 1, לכן $|H\cap K| = 1$. וכיוון ש-$H\cap K$ ת"ח, היא מכילה את איבר היחידה, כלומר:$H\cap K = \{e\}$.
הערה: ע"י הוכחה זו ניתן להסיק שהטענה נכונה עבור כל שתי ת"ח שהסדרים שלהן זרים זה לזה.

ב. יהי $x\in H\cap K$ איבר כלשהו. נניח בשלילה כי $x\ne e$. לכן $o(x) > 1$. אנחנו יודעים כי $o(x)$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$, ולכן בהכרח $o(x) = p$. כלומר $|\langle x\rangle| = p$, ומפני ש-H,K הן חבורות, הן סגורות לפעולה ונסיק $\langle x\rangle \subseteq H,K$.
מהנתון $|H| = |K| = p$ נקבל $\langle x\rangle = H = K$ כי ב-$\langle x\rangle$ יש בדיוק p איברים שונים.
אך זו סתירה לנתון, ונסיק כי $x = e$.

שאלה 3 (חזרה לבדידה)**.** תהי G חבורה ויהיו $A,B\subseteq G$ תת־קבוצות שלה. לכל סעיף כתבו פסוק לוגי שקול אך ורק עם כמתים (כמו $\forall$ ו-$\exists$) ושיוויונות מן הצורה $xy = zw$ עבור איברים של הקבוצות.

א. $ab = ba$ לכל איבר a של A ואיבר b של B.

ב. $aB = Ba$ לכל איבר a של A.

ג. $AB = BA$ (קבוצה כזו מוגדרת כקבוצת המכפלות איבר-איבר).

נסו למצוא דוגמאות שמראות שיש הבדל בין הסעיפים השונים ומי גורר את מי.

פתרון. כל סעיף גורר את אלו שתחתיו.

א. $\forall a\in A\ \ \forall b\in B: ab=ba$.

ב. $\forall a\in A\ \ \forall b\in B\ \ \exists b'\in B: ab=b'a$.

ג. $\forall a\in A\ \ \forall b\in B\ \ \exists b'\in B\ \ \exists a'\in A: ab=b'a'$.

שאלה 4. הוכיחו שאם $H\leq G$, אז $H\lhd G$ אמ"מ לכל $x,y\in G$, $xy\in H$ אמ"מ $yx\in H$.

פתרון. $(\Longleftarrow)$: H תת-חבורה נורמלית של G, לכן $H=ker(f)$ עבור הומומורפיזם f שתחומו G.

יהיו $x,y\in G$ כך ש-$xy\in H$ (ההוכחה דומה עבור המקרה שבו $yx\in H$). מתקיים: $f(x)f(y)=f(xy)=e$ כיוון ש-$H=ker(f)$.

זאת אומרת ש-$f(x),f(y)$ הופכיים זה לזה, לכן גם $f(yx)=f(y)f(x)=e$, ומכאן ש-$yx\in ker(f)=H$.

$(\Longrightarrow)$: יהיו $h\in H,g\in G$, נרצה להוכיח כי $g^{-1}hg\in H$ (זה יראה ש-$g^{-1}Hg\subseteq H$, כלומר: H סגורה להצמדה, תנאי שהוכחנו ששקול לנורמליות).

נשים לב כי $g^{-1}gh=h\in H$, ולכן לפי ההנחה, גם $g^{-1}hg\in H$ כדרוש (חשבו על זה כך: $x=g^{-1},y=gh$).

שאלה 5. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר תת־קבוצה שלה

$$V=\{\mathrm{id},(1\ 2)\,(3\ 4)\,,(1\ 3)\,(2\ 4)\,,(1\ 4)\,(2\ 3)\}$$

שנקראת חבורת הארבעה של קליין. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $V\lhd S_4$ (צ"ל שהיא ת"ח ושהיא נורמלית).

ב. כל חבורה מסדר 4 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$או ל-V (חשיבה על $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ יכולה לעזור).

ג. כל חבורה מסדר 5 ומטה היא אבלית (בפרט V אבלית).

פתרון. .

(א) נסמן את איברי V באופן הבא: $e=id,a=(1\ 2)\,(3\ 4)\,,b=(1\ 3)\,(2\ 4)\,,c=(1\ 4)\,(2\ 3)$

נשים לב כי $a^2=b^2=c^2=e^2=e$, כלומר: כל איברי V הם ההופכיים של עצמם (וסדרם 1 או 2).

כמו כן, $ab=ba=c$ ובאופן דומה מכפלת כל שני איברים מ-V שאינם היחידה שווה לשלישי.

בסך הכל, איבר היחידה של S_4 שייך ל-V, ו-V סגורה לפעולה ולהופכיים ולכן ת"ח שלS_4.

(ב) תהי G חבורה מסדר 4. אם G ציקלית, לפי טענה שהוכחנו, היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$. אחרת, לפי לגרנז', כל איבר ב-G הוא בהכרח מסדר 1 או 2 (ממש כמו ב-V. אם היה איבר מסדר 4 הוא היה יוצר את G).

מסדר 1 יש תמיד רק איבר אחד - היחידה, נסמנו ב-e', לכן יש ב-G 3 איברים מסדר 2, נסמנם ב: a',b',c'. מכאן יש רק אפשרות אחת לבנות לוח כפל ל-G (בנו ותבינו למה),

וזה בדיוק אותו לוח כפל כמו של V (ושל $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$) עד כדי שמות האיברים.

כלומר: $f:G\to V$ המוגדרת לפי: $f(a')=a,f(b')=b,f(c')=c,f(e')=e$,

היא איזומורפיזם (ברור שהיא חח"ע ועל, והזהות בין לוחות הכפל מראה שהיא גם שומרת על הפעולה).

(ג) תהי G חבורה כך ש-$|G| \leq 5$.
אם $|G| = 1$, זו החבורה הטריוויאלית שכמובן אבלית.
אם $|G| = 2, 3, 5$, זו חבורה ציקלית כי היא מסדר ראשוני ולכן היא אבלית.
ואם $|G| = 4$, לפי הסעיף הקודם, היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_4$או ל-V ששתיהן אבליות ולכן גם היא.

שאלה 6.

פתרון.
הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

ב. כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f : G \to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

ד. אם חבורת המנה G/N סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ה. אם חבורת המנה G/N ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

פתרון.

א. למשל $SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית, אבל היא נורמלית ב-$GL_2(\mathbb{R})$.

ב. למשל $\langle (1\,2) \rangle$ היא תת־חבורה אבלית של S_3 שאינה נורמלית.

ג. למשל בכל שיכון $f\colon \langle (1\,2) \rangle \to S_3$ התמונה היא לא תת־חבורה נורמלית.

ד. נבחר $G = \mathbb{Z}$ ואת $N = 2\mathbb{Z}$. אז $G/N \cong \mathbb{Z}_2$ מסדר 2, אבל G אינסופית.

ה. נבחר $G = S_3$ ואת $N = A_3$ שראינו בכיתה שהיא נורמלית ב-S_3. החבורה G/N מסדר 2 (שהוא ראשוני) ולכן ציקלית. אבל G אינה אבלית.

שאלה 7. נראה שאיזומורפיות בתת־חבורות נורמליות ובחבורות המנה ביחד עדין לא גורר איזומורפיות בחבורה "למעלה".

א. תנו דוגמה לחבורה אבלית G_1 ולחבורה לא אבלית G_2, שיש להן תת־חבורות נורמליות $H_1 \lhd G_1$ ו-$H_2 \lhd G_2$, כך שמתקיים $H_1 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$. רמז: אפשר למצוא דוגמאות כאלו כבר לחבורות מסדר 6 או 8.

ב. כמו בסעיף הקודם, אבל הפעם נדרוש ששתי החבורות G_1, G_2 הן אבליות ולא איזומורפיות. רמז: אפשר לבחור חבורות מסדר p^2 עבור p ראשוני.

פתרון.

א. כמו ברמז נבחר $G_1 = \mathbb{Z}_6$ ו-$G_2 = S_3$. ראינו שלשתיהן יש תת־חבורות מסדר 3, $H_1 = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ ו-$H_2 = A_3$. תת־החבורות H_i הן מאינדקס 2, ולכן נורמליות ב-G_i לכל i. כל חבורה מסדר 3 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$ וחבורות המנה G_i/H_i הן מסדר $\frac{6}{3} = 2$, ולכן איזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2$. לכן $H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$ וגם $G_1/H_1 \cong \mathbb{Z}_2 \cong G_2/H_2$.

ב. נבחר את $G_1 = \mathbb{Z}_9$ ואת $G_2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהן לא איזומורפיות (הראשונה ציקלית והשנייה לא). לשתיהן תת־חבורות מסדר 3 (למשל $\langle 3 \rangle \leq G_1$ ו-$\langle (1,0) \rangle \leq G_2$), וחבורות המנה לגביהן תהינה מסדר 3. נקבל שוב ש-$H_1 \cong \mathbb{Z}_3 \cong H_2$, והפעם גם חבורות המנה איזומורפיות שתיהן ל-$\mathbb{Z}_3$.

בהצלחה!