תרגיל בית 5 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 24.12.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. יהיו $f\colon G\to H$ ו-$g\colon H\to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g\circ f\colon G\to K$ היא הומומורפיזם.

שאלה 2. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. כל תת־חבורה נורמלית היא אבלית.

ב. כל תת־חבורה אבלית היא נורמלית.

ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f\colon G\to H$ היא תת־חבורה נורמלית של H.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 3.

א. מצאו את כל מחלקות הצמידות של D_4.
רמז: יש הרבה דרכים למצוא אותן, מבלי לחשב לכל איבר בנפרד לפי הגדרה. למשל אפשר להעזר בזה שכל איבר ניתן לכתוב בצורה $\tau^i\sigma^j$ או בכך שאתם כבר מכירים תת־חבורה נורמלית של D_4.

ב. תנו דוגמה לחבורה G, לתת־חבורה $H\leq G$ ולשני איברים $x,y\in H$ שהם צמודים ב-G, אבל אינם צמודים ב-H. רמז: הביטו למעלה.

שאלה 4. יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{im} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הוכיחו שאם G היא חבורת-p, אז גם $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p. הפריכו את הכיוון השני.

שאלה 5. תהי G חבורת-p סופית ותהי $N\lhd G$ לא טריוויאלית. הוכיחו כי $Z(G)\cap N\neq\{e\}$.
רמז: G פועלת על N על ידי הצמדה. העזרו בטיעון דומה לזה שראינו בכיתה בהוכחה ש-$Z(G)$ לא טריוויאלית.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_{>0}$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}_{>0}$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ג. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 3,\, n \bmod 6)$.

ד. $f\colon S_6 \to U_7 \times U_{11}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = (\sigma(1), \sigma(2))$.

שאלה 7. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^3.

א. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שלושה איברים $a, b, c \in G$ (כלומר $G = \langle a, b, c\rangle$). רמז: משפט לגראנז' כמה וכמה פעמים.

ב. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת לחבורה G אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים $a, b \in G$, אבל לא עם איבר אחד.

ג. רשות: הראו שישנה חבורה לא אבלית מסדר p^3 שאפשר ליצור עם שני איברים לפי ההדרכה הבאה: התבוננו בקבוצה (שכבר פגשנו מעל $\mathbb{R}$)

$$H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

ועל האיברים $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. הראו כי $\left|\left\langle a, aba^{-1}b^{-1} \right\rangle\right| = p^2$, והסיקו מזה ש-$H(\mathbb{Z}_p) = \langle a, b\rangle$.

שאלה 8. נאמר שפעולה של חבורה G על קבוצה X, כך ש-$2 < |X|$, היא 2-טרנזיטיבית אם לכל רביעיית איברים $x_1 \neq x_2 \in X$ ו-$y_1 \neq y_2 \in X$ קיים $g \in G$ כך ש-$g * x_1 = y_1$ וגם $g * x_2 = y_2$.

הערה: השאלה נראית יותר מפחידה ממה שהיא. בעיקר צריך להבין את ההגדרה.

א. הוכיחו שאם G פועלת 2-טרנזיטיבית על X אז היא גם פועלת טרנזיטיבית.

ב. הוכיחו כי G פועלת 2-טרנזיטיבית אם ורק אם G פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $X \times X \setminus \Delta$, כאשר $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ והפעולה היא רכיב-רכיב.

ג. הוכיחו כי A_4 פועלת 2-טרנזיטיבית על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$.

ד. יהי F שדה, ונניח $|F| > 2$. הוכיחו שהחבורה $GL_2(F)$ פועלת טרנזיטיבית על $F^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, אבל לא פועלת 2-טרנזיטיבית.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. כהמשך לתוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, הוסיפו לה פונקציה המחשבת את גודל מחלקת הצמידות של תמורה ב-S_n, ופונקציה המחשבת את סדר המְרַכֵּז שלה.

שאלה 10 (לכבוד החנוכה)**.** תהי חנוכיה בצורה

(האיור מאת פרוייקט EmojiOne תחת רישיון CC BY-SA 4.0)

ונרצה לסדר בה תשעה נרות בארבעה צבעים אפשריים. נאמר ששני סידורי נרות הם שקולים אם אחד מהם מתקבל מן השני בסיבוב של המנורה (סביב השַמָש שבאמצע).

א. תנו דוגמה לחבורה G ולפעולה של G על קבוצת סידורי הנרות, כך שהמסלולים של הפעולה הם בדיוק קבוצות של סידורי נרות שקולים.

ב. מצאו כמה סידורי נרות שונים ישנם עד כדי שקילות, בעזרת הפעולה מהסעיף הקודם. רמז: אפשר לקרוא בויקיפדיה על הלמה שאינה של ברנסייד (וגם באנגלית).

שאלה 11. גרסה קשה יותר של שאלה 10: נניח שהחנוכיה היא עגולה, ושמונת הנרות נמצאים במרווחים שווים על ההיקף. גם עכשיו נאמר ששני סידורי נרות הם שקולים אם אחד מהם מתקבל מן השני בסיבוב של המנורה (סביב השַמָש שבמרכז).
כמה סידורי נרות שונים ישנם, עד כדי שקילות? אפשר לנסות קודם גרסה קלה יותר שבה יש רק שני צבעים אפשריים לנרות.

בהצלחה!