תרגול 9

פירוק cholesky:

נחפש מט' משולשת עליונה U:

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

רק ש- $A=U^T\cdot U$

צ"ל

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}^2 & \overset{u_{11}u_{12}}{\cap} & \cap \\ u_{11}u_{12} & u_{12}^2+u_{22}^2 & \cap \\ u_{11}u_{13} & u_{13}u_{12}u_{23}u_{22} & u_{13}^2+u_{23}^2+u_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}=u_{11}^2 \Rightarrow u_{11}=\sqrt{a_{11}}$$

$$u_{11}u_{12}=a_{21} \Rightarrow u_{12}=a_{21}/u_{11}$$

$$\vdots$$

כך הלאה נמצא את כל המשתנים.

באופן כללי עבור מט' nxn הנוסחה:

$$u_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}u_{ki}}$$

$$u_{ij}=\frac{a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}u_{ik}\cdot u_{jk}}{u_{ii}} \qquad i<j$$

היתרון המרכזי: חיסכון של 50% בפעולות לעומת פירוק LU

הפקודה ב- MATLAB:

```
>>A=[---];
① U=chol(A);
```

ונקבל מט' U כך ש- $A=U^T\cdot U$

קס" **דוגמא:** קבע פירוק cholesky למטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

פתרון: A סימטרית וחיובית. נחפש U רק ש-

$$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

ונדרוש:

$$U^T\cdot U = A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}^2 & \cap & \cap \\ u_{11}u_{12} & u_{12}^2+u_{22}^2 & \cap \\ u_{11}u_{13} & u_{13}u_{12}+u_{23}u_{22} & u_{13}^2+u_{23}^2+u_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 20 & 32 \\ 5 & 32 & 64 \end{pmatrix}$$

$$u_{11}^2=1 \Rightarrow \boxed{u_{11}=1}$$
$$u_{11}u_{12}=4 \Rightarrow \boxed{u_{12}=4}$$
$$u_{11}u_{13}=5 \Rightarrow \boxed{u_{13}=5}$$
$$\underbrace{u_{12}^2}_{=16}+u_{22}^2=20 \Rightarrow \boxed{u_{22}=2}$$

$$u_{13}u_{12}+u_{23}u_{22}=5\cdot 4+u_{23}\cdot 2=32 \Rightarrow \boxed{u_{23}=6}$$

$$u_{13}^2+u_{22}^2+u_{33}^2=64$$

$$25+36+u_{33}^2=64 \Rightarrow \boxed{u_{33}=\sqrt{3}}$$

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

תרגיל: תהי A מטריצה מסדר 2×2, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

כאשר $a,b,c,d>0$

א. חשב את מט' B עבור שיטת יעקובי.

ב. מצא תנאי מספיק והכרחי להתכנסות.

ג. מצא תנאי מספיק המבוסס על $\|\cdot\|_\infty$ להתכנסות.

ד. הוכח או הפרך - אם A לא מקיימת את התנאי, האיטרציות יתבדרו.

פתרון:

$$X_{n+1}=B\cdot X_n+C$$

$$B=-D^{-1}(L+U)$$

$$D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix};\ L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix};\ U=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

$$B=-\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -b/a \\ -c/d & 0 \end{pmatrix}$$

ב. $\rho(B)<1 \Rightarrow$ תנאי מספיק והכרחי.

תזכורת: $\rho(B)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i(B)|$

הערך העצמי המקסימלי

בערכו המוחלט.

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix} \lambda & b/a \\ c/d & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{bc}{da}=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{bc}{da}}$$

נדרוש $|\lambda_{1,2}|<1 \iff \frac{bc}{da}<1 \iff \boxed{bc<da}$

סעיף ג. $\|B\|_\infty < 1$ צ"ל:

$$\|B\|_\infty = MAX\left(\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{c}{d}\right|\right) < 1$$

צ"ל: $b<a \wedge c<d$.

ב. נפריך: ניקח:

$b \geq a$

$b=2$

$a=1$

נדרש

$bc < da$

$2c < d$

$d=1 \Rightarrow c=\frac{1}{4}$

צ"ל שהמטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$

מקיימת את התנאי בסעיף ב' ולא מקיימת את התנאי בסעיף ג'.

מציאת ערכים-עצמיים:

תזכורת: הע"ע של A אם $|\lambda I - A| = 0$

וע"ע המתאים לע"ע λ אם $A \cdot V = \lambda V$.

power-method:

שיטה איטרטיבית למציאת הע"ע הגדול ביותר של מט' A (בערכו המוחלט)

האלגוריתם:

1. נבחר ניחוש התחלתי ל-V_1 ונסמן ב-X_k.
2. $X' = A \cdot X_k$
3. $X_{k+1} = \frac{X'}{\|X'\|_\infty}$ (נירמול)
4. נחזור ל-2 עד ש- $\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon$
5. $V_1 \sim X_{k+1}$; $\lambda_1 \sim \alpha$

בס"ד

דוגמא: נמצא את הע"ע הגדול ביותר בערכו המוחלט עבור המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

עם $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X'=A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{5}_{\alpha}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}}_{X_2}$$

$$X'=A\cdot X_2=\begin{pmatrix} 4.6 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}=\underbrace{4.6}_{\alpha}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.217 \\ 0.0435 \end{pmatrix}}_{X_3}$$

$$X'=A\cdot X_3=\underbrace{4.2174}_{\alpha}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0.1134 \\ -0.0183 \end{pmatrix}}_{X_4}$$

$$\lambda=4$$

$$V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

יתרונות: תמיד מתכנס. (אם קיימים ע"ע ממשיים)

חסרונות: רק ע"ע הגדול ביותר.

Inverse power-Method:

כדי למצוא את הע"ע המינימלי של A, נחשב את הע"ע המקסימלי של A^{-1}, נסמנו μ, ואז $\lambda=\frac{1}{\mu}$.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X' = A^{-1} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 1/8 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}$$

$$X' = A^{-1} \cdot X_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/16 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mu} = \boxed{2}$$

: shift Method

אם ידוע λ1 אחד הע"ע של A, ניתן למצוא לפחות עוד ע"ע אחד ע"י טכניקת ההזזה.

נגדיר מטריצה: $B = A - \lambda I$, ואז נפעיל Power-Method על B ונמצא את הע"ע הגדול ביותר בערכו המוחלט (של B) μ.

$$\lambda_2(A) = \mu + \lambda_1$$

דוגמא: ניקח את המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאנו ע"ע גדול ביותר <u>4</u>:

$$B = A - \lambda I = A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

נחפש ע"ע הגבוה ביותר של B: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X' = B \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{-5}_{\alpha} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2}$$

$$X' = B \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ -5 \end{pmatrix} = \underbrace{-5}_{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2(A) = -5 + 4 = \boxed{-1}$$

שיטת ניוטון רב מימדית:

תזכורת: עבור פונקציה של משתנה אחד $f(x)$, נרצה למצוא את שורש הפונקציה.

אז:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

במקרה ש-f היא פו' של כמה משתנים. הנוסחה תהיה:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_m)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_m)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_m)=0 \end{cases}$$

n פונקציות
m נעלמים

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \vec{J}(x_n)^{-1} \cdot \vec{f(\vec{x}_n)}$$

כאשר J- היא מטריצת היעקוביאן.

הגדרת היעקוביאן:

עבור n פונקציות ו-m נעלמים, מט' היעקוביאן היא מט' מגודל $m \times n$ רק שבתא ה-(i,j) מכיל את הנגזרת של הפונקציה f_j לפי המשתנה x_i.

דוגמא: נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2-y^2+2 \\ x^2+4y-6 \end{cases}$$

ונתון קירוב לווקטור הפתרונות ההתחלתי: $x_0 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \left[= \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right]$

נחשב את מט' היעקוביאן:

$$J = \begin{pmatrix} df_1/dx & df_2/dx \\ df_1/dy & df_2/dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -2y \\ 2x & 4 \end{pmatrix}$$

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(x_0) = \frac{1}{det} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-40}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 \\ -0.05 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$\overline{\underline{2c5}}$

$$f(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(-1,2) \\ f_2(-1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_1} = \vec{x_0} - J(x_0)^{-1} \cdot f(x_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$