

בחינת סיום (מועד ב') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים.

נא לענות על 3 מתוך 4 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 24 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון ודף הנוסחאות המצורף לבחינה בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

נתבונן בחבורת הקוטרניונים $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$, עם הפעולות שראינו בהרצאה ובתרגול. [בפרט, מתקיים $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ וכן $ij = k, ji = -k$].

- א. תנו דוגמא לשתי תתי חבורות לא טריוויאליות של H שאינן איזומורפיות זו לזו. [החבורה עצמה ואיבר היחידה בלבד הן תתי חבורות טריוויאליות ולכן אינן נחשבות].
- ב. הוכיחו כי כל תת חבורה לא טריוויאלית של H איזומורפית לאחת משתי תתי החבורות שמצאתם בסעיף א'.

שאלה 2

א. הוכיחו כי החבורות $(Q, +)$ [כלומר, הרציונליים עם פעולת חיבור] ו- $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ [כלומר, הרציונליים פרט ל-0 עם פעולת כפל] אינן איזומורפיות.

ב. תנו דוגמא לשתי חבורות אינסופיות איזומורפיות, כאשר באחת מהן הפעולה היא חיבור ובשניה הפעולה היא כפל.

שאלה 3

א. תהי G חבורה ותהיינה N, H תתי חבורות נורמליות שלה, כך שמתקיים $N \cap H = \{e\}$. הוכיחו כי לכל $x \in N, y \in H$ מתקיים $xy = yx$.

ב. תנו דוגמא לחבורה G ותת חבורה נורמלית שלה N , כך ש- N איננה קומוטטיבית.

שאלה 4

א. האם החוג $R = Z_2[x]/\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rangle$ (כלומר, חוג המנה של החוג $Z_2[x]$ ביחס לאידאל הנוצר על ידי הפולינום $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$) הוא שדה? הוכיחו את תשובתכם.

ב. תנו דוגמא לתת חוג של החוג R שהוגדר בסעיף א', אשר מכיל 4 איברים בדיוק. עליכם לרשום במפורש מה הם איברי תת החוג ולהוכיח שהוא תת חוג.