מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

שאלה 1

הוכיחו בעזרת הלמה של צורן את עיקרון המקסימום של האוסדורף: תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. אזי כל שרשרת ב-$(X,\leq)$ מוכלת בשרשרת מקסימלית.

[תזכורת: שרשרת ב-$(X,\leq)$ היא תת קבוצה $Y\subseteq X$ כך שלכל $a,b\in Y$ מתקיים $a\leq b$ או $b\leq a$. שרשרת נקראת מקסימלית אם היא לא מוכלת באף שרשרת למעט עצמה.]

הוכחה

תהי U קבוצת כל השרשראות ב-$(X,\leq)$. הזוג $(U,\subseteq)$ הוא קס"ח. נוכיח כי היא מקיימת את תנאי הלמה של צורן:

U לא ריקה כי $\phi\in U$ ("השרשרת הריקה").

תהי Y שרשרת ב-U (שימו לב: Y היא <u>שרשרת של שרשראות</u> ב-X!). נוכיח כי קיים חסם מלעיל ל-Y:
נגדיר $C=\cup_{A\in Y}A$. נוכיח כי $C\in U$ (כלומר C שרשרת ב-$(X,\leq)$):
יהיו $x,y\in C$. אזי קיימים $A,B\in Y$ כך ש-$x\in A, y\in B$. היות ו-Y שרשרת (ביחס להכלה), $B\subseteq A$ או $A\subseteq B$. בלי הגבלת כלליות נניח $A\subseteq B$ (אחרת, נחליף בין x,A ל-y,B). אזי $x,y\in B$. היות ו-B שרשרת ב-$(X,\leq)$, $y\leq x$ או $x\leq y$ וזה מה שרצינו להראות.
לכן, $C\in U$ ולכל $A\in Y$ מתקיים $A\subseteq \cup_{B\in Y}B=C$. כלומר, C חסם מלעיל של Y.

הראינו כי $(U,\subseteq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן ולכן קיים בה איבר מקסימלי Y. Y היא שרשרת מקסימלית ביחס להכלה ולכן גמרנו. **משל.**

שאלה 2

יהי $0<\epsilon\in\mathbb{R}$. תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תיקרא ϵ-דלילה אם לכל $a,b\in A$ שונים מתקיים $|a-b|\geq\epsilon$.[1]

א. הוכיחו כי כל קבוצה ϵ-דלילה A מוכלת בקבוצה ϵ-דלילה מקסימלית ביחס להכלה.
[הדרכה: תהי X קבוצת כל תתי הקבוצות ה-ϵ-דלילות של $\mathbb{R}$ המכילות את A. אזי $(X,\subseteq)$ היא קבוצה סדורה חלקית. השתמשו בלמה של צורך כדי להראות כי קיים בה איבר מקסימלי.]

ב. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה <u>מקסימלית</u> ביחס להכלה. הוכיחו כי לכל $b\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך ש-$|a-b|<\epsilon$.

ג. הראו כי כל קבוצה ϵ-דלילה היא בת מנייה. (הערה: הסעיף הזה לא קשור ללמה של צורן.)

הוכחה

הוכחת א: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה. נגדיר את X להיות קבוצת כל הקבוצות $B\in P(\mathbb{R})$ כך ש-$A\subseteq B$ וגם B ϵ-דלילה. אזי $(X,\subseteq)$ היא קס"ח. נוכיח כי היא מקיימת את תנאי הלמה של צורן.

X לא ריקה כי $A\in X$ (באמת, $A\subseteq A$ וגם A ϵ-דלילה).

[1] לקבוצה של אוריה (וגם של ארז): שימו לב שזה מקרה פרטי של התרגיל על הלמה של צורן שפתרנו בשיעור האחרון.

תהי Y שרשרת <u>לא ריקה</u>[2] ב-$(X,\subseteq)$. נוכיח כי קיים חסם מלעיל ל-Y: נגדיר $U=\cup_{B\in Y} B$. נראה ש-$U\in X$.

ראשית, קיים $B\in Y$. אזי $B\in X$ ולכן $A\subseteq B$. לכן, $A\subseteq B\subseteq \cup_{C\in Y} C=U$. יהיו $x,y\in U$ שונים, אזי קיימים $B,C\in Y$ כך ש-$x\in B, y\in C$. היות ו-Y שרשרת, $B\subseteq C$ או $C\subseteq B$. בה"כ נניח $B\subseteq C$ (אחרת נחליף בין x,B ל-y,C). אזי $x,y\in C$ ו-$C\in X$ ולכן ϵ-דלילה, כלומר $|x-y|\geq\epsilon$. לכן, הראינו ש-$A\subseteq U$ ו-U ϵ-דלילה, כלומר $U\in X$.

לכל $C\in Y$ מתקיים $C\subseteq\cup_{B\in Y} B=U$ ולכן U חסם מלעיל של Y.

הראינו כי $(X,\subseteq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן ולכן קיים בה אבר מקסימלי B. אזי B היא ϵ-דלילה, מקסימלית ביחס להכלה ומכילה את A. **משל.**

הוכחת ב: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה <u>מקסימלית</u> ביחס להכלה. יהי $b\in\mathbb{R}$. צ"ל שקיים $a\in A$ כך ש-$|a-b|<\epsilon$.

אם $b\in A$ נבחר $a=b\in A$ ונקבל $|b-a|=0<\epsilon$, כדרוש. אחרת, $A\subsetneq A\cup\{b\}$. היות ו-A היא קבוצה ϵ-דלילה מקסימלית, נובע ש-$A\cup\{b\}$ אינה ϵ-דלילה (אחרת נקבל סתירה למקסימליות). לכן, קיימים $x,y\in A\cup\{b\}$ שונים כך ש-$|x-y|<\epsilon$. לא ייתכן כי $x,y\in A$ כי אז נקבל סתירה לכך ש-A קבוצה ϵ-דלילה. בנוסף, לא ייתכן כי $x,y\in\{b\}$ כי אז $x=y$ (והנחנו שהם שונים). לכן, בהכרח $x\in\{b\}, y\in A$ או $x\in A, y\in\{b\}$. בה"כ $x\in\{b\}, y\in A$ (אחרת נחליף בין x ו-y). אזי $x=b$. נבחר $a=y\in A$ ונקבל $|a-b|=|y-x|=|x-y|<\epsilon$. **משל.**

הוכחת ג: תהי A קבוצה ϵ-דלילה. כדי להוכיח ש-A בת מנייה מספיק למצוא פונקציה חח"ע $f:A\to\mathbb{Q}$. לכל $a\in A$ נגדיר $B_a=\left(a-\frac{\epsilon}{2},a+\frac{\epsilon}{2}\right)\cap\mathbb{Q}$. היות וכל קטע פתוח לא ריק מכיל מספר רציונלי נובע ש-$B_a\neq\phi$. לכן, לפי אקסיומת הבחירה, קיימת פונקציה $f:A\to\cup_{a\in B_a} B_a\subseteq\mathbb{Q}$ כך ש-$f(a)\in B_a$. גמרנו אם נוכיח ש-f חח"ע: יהיו $a,b\in A$ כך ש-$f(a)=f(b)$. נסמן $x=f(a)=f(b)$. אזי $x\in B_a\cap B_b$ ולכן $x\in\left(a-\frac{\epsilon}{2},a+\frac{\epsilon}{2}\right)\cap\left(b-\frac{\epsilon}{2},b+\frac{\epsilon}{2}\right)$. זה אומר ש-$|x-b|<\frac{\epsilon}{2}$ ו-$|a-x|<\frac{\epsilon}{2}$. לכן, $|a-b|\leq|a-x|+|x-b|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. היות ו-$A$ היא ϵ-דלילה, בהכרח $a=b$ (אחרת נקבל סתירה לדלילות). **משל.**

שאלה 3

תהי A קבוצה ויהי R_0 יחס סדר על A.

א. הוכיחו כי קיים יחס סדר מקסימלי (ביחס להכלה) המכיל את R_0. *[הדרכה: תהי X קבוצת יחסי הסדר על A המכילים את R_0. השתמשו בלמה של צורן על $(X,\subseteq)$.]*

ב. (*) הוכיחו כי כל יחס סדר מקסימלי (ביחס להכלה) על A הוא יחס סדר מלא. הסיקו כי כל יחס סדר על A מוכל ביחס סדר מלא.

הוכחה

סעיף א: תהי X קבוצת יחסי הסדר על A המכילים את R_0. אזי $(X,\subseteq)$ קס"ח. נראה כי $(X,\subseteq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן.

$X\neq\phi$ כי $R_0\in X$ (באמת, R_0 יחס סדר חלקי ו-$R_0\subseteq R_0$).

---

[2] בלמה של צורן מספיק לבדוק רק שלכל שרשרת לא ריקה יש חסם מלעיל. זאת משום שכל איבר בקס"ח שלנו (שאינה ריקה!) הוא חסם מלעיל של השרשרת הריקה.

תהי Y שרשרת לא ריקה ב-X. נגדיר $R=\cup_{S\in Y} S$. אנו טוענים כי R חסם מלעיל של Y ב-X. ראשית נוכיח כי $R\in X$ (כלומר, R יחס סדר חלקי על A המכיל את R_0).

0. <u>נראה ש-$R_0\subseteq R$:</u> Y לא ריקה ולכן קיים $S_0\in Y$. אזי $S_0\in X$ ולכן $R_0\subseteq X$. לפיכך, $R_0\subseteq S\subseteq\cup_{S\in Y} S=R$.
1. <u>נראה ש-R רפלקסיבי:</u> יהי $a\in A$. אזי $(a,a)\in R_0$ (כי R_0 רפלקסיבי) ולפי 0, נובע ש-$(a,a)\in R$.
2. <u>נראה ש-R אנטי סימטרי:</u> יהיו $a,b\in A$ כך ש-$(a,b),(b,a)\in R$. אזי לפי הגדרת R קיימים $S_1,S_2\in Y$ כך ש-$(a,b)\in S_1$ ו-$(b,a)\in S_2$. היות ו-Y שרשרת, $S_1\subseteq S_2$ או $S_2\subseteq S_1$. בה"כ נניח כי $S_1\subseteq S_2$ (אחרת, נחליף בין a ו-b). אזי $(a,b),(b,a)\in S_2$. היות ו-$S_2\in Y\subseteq X$, אז S_2 יחס סדר ולכן $a=b$, כדרוש.
3. <u>נראה ש-R טרנזיטיבי:</u> יהיו $a,b,c\in A$ כך ש-$(a,b),(b,c)\in R$. אזי לפי הגדרת R קיימים $S_1,S_2\in Y$ כך ש-$(a,b)\in S_1$ ו-$(b,c)\in S_2$. היות ו-Y שרשרת, $S_1\subseteq S_2$ או $S_2\subseteq S_1$. נגדיר $S=S_1\cup S_2$. אזי $S=S_1$ או $S=S_2$ ולכן $(a,b),(b,c)\in S\in Y$. היות ו-S טרנזיטיבי, נובע ש-$(a,c)\in S$ ולכן $(a,c)\in S\subseteq\cup_{S\in Y} S=R$, כדרוש.

כעת, לכל $S_0\in Y$ מתקיים $S_0\subseteq\cup_{S\in Y} S=R$ ולכן R חסם מלעיל של Y.

הראינו כי תנאי הלמה של צורן מתקיימים עבור $(X,\subseteq)$ ולכן קיים ב-X איבר מקסימלי R. אם R מוכל ביחס סדר אחר R', אז $R'\in X$ (כי $R_0\subseteq R\subseteq R'$) ולכן $R=R'$ (כי R מקסימלי ב-$(X,\subseteq)$). לכן, R הוא יחס סדר חלקי, מקסימלי ביחס להכלה, המכיל את R_0. **משל.**

סעיף ב: יהי R יחס סדר על A מקסימלי ביחס להכלה. נניח <u>בשלילה</u> ש-R אינו יחס סדר מלא. אזי קיימים $x,y\in A$ כך ש-$(x,y),(y,x)\notin R$. נגדיר $U=\{u\in A|(u,x)\in R\}$, $V=\{v\in A|(b,y)\in R\}$ ו-$R'=R\cup(U\times V)$. אנו טוענים כי R' יחס סדר חלקי על A.

1. <u>נראה כי R' רפלקסיבי:</u> יהי $a\in A$. אזי $(a,a)\in R$ כי R רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R'$.
2. <u>נראה כי R' טרנזיטיבי:</u> יהיו $a,b,c\in R'$ כך ש-$(a,b),(b,c)\in R'$. נחלק למקרים:
   a. <u>אם $(a,b),(b,c)\in R$</u>, אז $(a,c)\in R\subseteq R'$ כי R טנזיטיבי.
   b. <u>אם $(a,b)\in U\times V$ ו-$(b,c)\in R$</u>, אז $(a,x),(y,b)\in R$. היות ו-R טנזיטיבי $(y,c)\in R$ (כי $(y,b),(b,c)\in R$) ולכן $c\in V$, כלומר $(a,c)\in U\times V\subseteq R'$.
   c. <u>אם $(b,c)\in U\times V$ ו-$(a,b)\in R$</u>, אז $(b,x),(y,c)\in R$. היות ו-R טנזיטיבי $(a,x)\in R$ (כי $(a,b),(b,x)\in R$) ולכן $a\in U$, כלומר $(a,c)\in U\times V\subseteq R'$.
   d. <u>אם $(a,b),(b,c)\in U\times V$</u>, אז $(y,b),(b,x)\in R$ (כי $b\in U$ ו-$b\in V$). היות ו-R טרניזיטיבי, נובע $(y,x)\in R$, בסתירה להנחה ש-$(y,x)\notin R$. לכן מקרה זה בלתי אפשרי.

   בכל מקרה קיבלנו $(a,c)\in R'$, כדרוש.
3. <u>נראה כי R' אנטי-סימטרי:</u> יהיו $a,b\in A$ כך ש-$(a,b),(b,a)\in R'$. נחלק למקרים:
   a. <u>אם $(a,b),(b,a)\in R$</u>, אז $a=b$ כי R אנטי סימטרי.
   b. <u>אם $(a,b)\in U\times V$</u>, אז $(a,x),(y,b)\in R$. היות ו-R' טרזיטיבי (הוכחנו זאת), $(y,x)\in R'$ (כי $(y,b),(b,a),(a,x)\in R'$). היות ו-R $(y,x)\notin R$, נובע ש-$(y,x)\in U\times V$ ולכן $(y,x)\in R$ (כי $y\in U$), בסתירה להנחה ש-$(y,x)\notin R$. לכן מקרה זה בלתי אפשרי.
   c. <u>אם $(b,a)\in U\times V$</u> אז נקבל סתירה בדיוק כמו ב-b (מחליפים בין a ו-b).

   בכל מקרה קיבלנו ש-$a=b$, כדרוש.

כעת, R' יחס סדר על A ו-$R\subsetneq R'$ כי $(x,y)\in U\times V\subseteq R'$, אבל $(x,y)\notin R$. כלומר קיבלנו סתירה למקסימליות של R. לכן, בהכרח R יחס סדר מלא.

לפי סעיף א, כל יחס סדר על A מוכל ביחס סדר מקסימלי. כל יחס סדר מקסימלי הוא יחס סדר מלא, ולכן כל יחס סדר מוכל ביחס סדרמלא. **משל.**

שאלה 4

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $S \subseteq V$ קבוצה הפורשת את V. בשאלה זו נוכיח ש-S מכילה בסיס. [באלגברה לינארית הוכחתם את זה כאשר S קבוצה סופית, אבל אנחנו נוכיח את זה עבור כל S!]

לפי עיקרון הסדר הטוב, קיים סדר טוב $\leq$ על S. עבור כל $v \in S$ נגדיר
$S_{\leq v} = \{s \in S | s \leq v\}$ ו- $S_{<v} = S_{\leq v} \setminus \{v\}$ (כלומר, $S_{<v}$ היא קבוצת הוקטורים שקטנים ממש מ-v).
נגדיר גם את $B = \{v \in S \mid v \notin \operatorname{span}(S_{<v})\}$.

א. הוכיחו כי B קבוצה בת"ל. (כאן אין צורך בהנחה ש-$(S, \leq)$ קבוצה סדורה היטב).
ב. הוכיחו כי לכל $v \in S$ מתקיים $v \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq v})$.
[הדרכה: נגדיר $X = \{v \in S | v \notin \operatorname{span}(B \cap S_{\leq v})\}$ ונניח בשלילה ש-X לא ריקה. היות ו-$(S, \leq)$ סדורה היטב, קיים ב-X איבר קטן ביותר, שנסמנו ב-x.
הוכיחו כי $x \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq x})$ והגיעו לסתירה.]
ג. הסיקו כי $\operatorname{span}(B) = V$ ולכן B בסיס.
ד. (*) הראו ע"י דוגמא כי $\operatorname{span}(B) = V$ לא בהכרח מתקיים אם $(S, \leq)$ אינה סדורה היטב.

הוכחה

סעיף א: נניח בשלילה כי B ת"ל, כלומר קיימים $v_1, \ldots, v_k \in B$ שונים ו-$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ שלא כולם 0 כך ש-$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ $(k \geq 1)$. בה"כ $v_1 < v_2 < \cdots < v_k$ ו-$\alpha_k \neq 0$ (אחרת, נשנה את הסדר של $v_1, \ldots, v_k$ ונוריד את ה-i-ים עבורם $\alpha_i = 0$). זה אומר ש-$v_k = \alpha_k^{-1}\left(-\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i\right) \in \operatorname{span}\left(S_{<v_k}\right)$, ולכן $v_k \notin B$, אבל זו סתירה להנחה ש-$v_k \in B$. לכן, B בת"ל. **משל.**

סעיף ב: נגדיר $X = \{v \in S | v \notin \operatorname{span}(B \cap S_{\leq v})\}$. אזי צריך להוכיח ש-$X = \phi$. נניח בשלילה ש-$X \neq \phi$, אזי היות ו-$(S, \leq)$ סדורה היטב, קיים איבר קטן ביותר ב-X שנסמנו ב-x. לא ייתכן ש-$x \in B$ כי אז נקבל $x \in B \cap S_{\leq x} \;\Leftarrow\; x \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq x}) \;\Leftarrow\; x \notin X$ וזו סתירה. לכן, $x \notin B$. כלומר, $x \in \operatorname{span}(S_{<x})$. זה אומר שקיימים $v_1, \ldots, v_k \in S_{<x}$ ו-$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ כך ש-$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. יהי $1 \leq i \leq k$. היות ו-$v_i < x$, $v_i \notin X$ (כי x הוא האיבר הקטן ביותר ב-X). לכן, $v_i \in \operatorname{span}\left(B \cap S_{\leq v_i}\right)$.
היות ו-$v_i < x$, מתקיים $S_{\leq v_1} \subseteq S_{\leq x} \;\Leftarrow\; B \cap S_{\leq v_1} \subseteq B \cap S_{\leq x} \;\Leftarrow\; v_i \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq x})$. לפיכך, $v_1, \ldots, v_k \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq x}) \;\Leftarrow\; x \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq x}) \;\Leftarrow\; x \notin X$ וזו סתירה לכך ש-$x \in X$. לכן, בהכרח $X = \phi$. **משל.**

סעיף ג: לפי סעיף ב, לכל $v \in B$ מתקיים $v \in \operatorname{span}(B \cap S_{\leq v}) \subseteq \operatorname{span}(B)$. לכן, $S \subseteq \operatorname{span}(B) \;\Leftarrow$ $V = \operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(B)$. היות ו-$\operatorname{span}(B) \subseteq V$, נובע ש-$\operatorname{span}(B) = V$ ולכן B בסיס של V (כי B קבוצה פורשת בת"ל).

סעיף ד: נחשוב על $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל עצמו ונגדיר $S = \{e^n | n \in \mathbb{Z}\}$. נסדר את S לפי הסדר הרגיל של המספרים הממשיים (שימו לב שב-S אין איבר קטן ביותר ולכן היא לא סדורה היטב). אזי $\operatorname{span}(S) = \mathbb{R}$, אבל $B = \phi$ כי לכל $e^n \in S$ מתקיים $e^n \in \operatorname{span}\{e^{n-1}\} \subseteq \operatorname{span}(S_{<e^n})$ ולכן $e^n \notin B$. זה אומר ש-$\operatorname{span}(B) = \{0\} \neq \mathbb{R}$.

שאלה 5 ("קצרים" – נמקו בקצרה את הפיתרון)

א. בכמה דרכים ניתן לסדר n בנים (זהים) ו-m בנות (זהות) בשורה?

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר 3 כדורים אדומים, 2 כדורים כחולים ו-4 כדורים ירוקים בשורה?
ג. כמו סעיף ב, אבל כאשר אסור ששני הכדורים הכחולים יהיו סמוכים זה לזה.
ד. בכמה דרכים ניתן לשים n תוכים זהים ב-k כלובים שונים? (כלוב יכול להכיל כל מספר של תוכים כולל 0). *[רמז: נסו להמיר את הבעיה לסעיף א ע"י הוספת "חוצצים" בין הכלובים].*
ה. בסופרמרקט יש k קופות (שונות). בכמה דרכים ניתן לסדר n אנשים שונים בתור לקופות? (תור יכול להיות ריק. יש חשיבות לסדר של האנשים בתור.)
ו. כמו סעיף ה, אבל כאשר בכל תור יש לפחות איש אחד ($n \geq k$).
ז. כמה פונקציות יש מקבוצה בת k איברים לקבוצה בת n איברים?
ח. כמה פוקציות חח"ע יש מקבוצת יחסי הסדר המלאים על קבוצה בת n איברים אל קבוצה בת m איברים?
ט. תהי A קבוצה בת n איברים, B קבוצה בת m איברים ו-$f: A \to B$ פונקציה חח"ע ($m \geq n$). כמה פונקציות הופכיות משמאל יש ל-f?
י. בכמה דרכים ניתן לבחור זוג סדור של שני מספרים בין 1 ל-100 (כולל) שסכומם מתחלק ב-3?
יא. כמו סעיף י, אבל כאשר אין משמעות לסדר של המספרים.
יב. כמה תתי קבוצות בגודל 3 או יותר יש לקבוצה עם n איברים ($3 \leq n$)?
יג. תהי A קבוצה עם n איברים, B קבוצה עם m איברים ונניח ש-$A \cap B = \phi$. כמה תתי קבוצות של $A \cup B$ מכילות לפחות איבר אחד מ-A ולפחות איבר אחד מ-B?
יד. כמו סעיף יג, כאשר $k = |A \cap B|$.
טו. (*) בכמה דרכים ניתן לסדר את המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$ בשורה כך ש-1 מופיע משמאל ל-2?

פיתרון

א. מספיק לבחור את המקומות של הבנים בשורה (אין חשיבות לסדר). לכן, זה כמו מספר הדרכים לבחור n חפצים מתוך $n+m$ ללא חשיבות לסדר, כלומר $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$.
ב. אם הכדורים היו שונים, היו $9! = (3+2+4)!$ אפשרויות לסדר אותם בשורה. בגלל שהכדורים האדומים\ירוקים\כחולים זהים, כל אפשרות כזו נספרת $3! \cdot 2! \cdot 4!$ פעמים ([מספר האפשרויות לסדר את הכדורים האדומים במקומות שלהם] כפול [מספר האפשרויות לסדר את הכדורים הכחולים במקומות שלהם] כפול [מספר האפשרויות לסדר את הכדורים הירוקים במקומות שלהם]). כלומר, מספר הדרכים הוא $\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} = 1260$.
ג. קודם נספור כמה דרכים יש לסדר כאשר שני הכדורים הכחולים סמוכים. זה כמו להתייחס אל שני הכדורים הכחולים כאל כדור כחול אחד גדול, ולכן יש $\binom{3+1+4}{3,1,4} = \frac{8!}{3!1!4!} = 280$ סידורים כאלה. לכן, מספר הסידורים בהם שני הכדורים הכחולים לא סמוכים זה לזה הוא $\binom{9}{3,2,4} - \binom{8}{3,1,4} = 1260 - 280 = 980$.
ד. זה כמו מספר הדרכים לסדר n תוכים זהים ו-$k-1$ חוצצים בשורה (כל חוצץ יהיה "קיר" של כלוב). מספיק לבחור את המקומות של התוכים ואין חשיבות לסדר הבחירה ולכן התשובה היא $\binom{n+k-1}{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.
ה. זה כמו מספר הדרכים לסדר n אנשים שונים ו-$k-1$ חוצצים בשורה (כל חוצץ יפריד בין שני תורים). מספיק לבחור את המקומות של האנשים. היות והם שונים, זה כמו לבחור n מקומות מתוך $n+k-1$ כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה (בוחרים את המקום של איש 1, אח"כ של איש 2 וכו') ולכן מספר האפשרויות הוא $\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$.
ו. אפשר קודם לבחור מי יהיה האיש הראשון בכל תור. לאחר שעשינו זאת אפשר לסדר את שאר $n-k$ האנשים בתורות כרצוננו (אחרי הראשונים בתור). לכן, התשובה היא [מספר

הדרכים לבחור k אנשים מתוך n עם חשיבות לסדר] כפול [מספר הדרכים לשים $n-k$ אנשים שונים ב-k תורות]. לפי סעיף ה, זה יוצא $\frac{n!(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{((n-k)+(k-1))!}{(k-1)!}$.

ז. נסמן את אברי קבוצת המקור ב-$a_1, a_2, \dots, a_k$. אזי יש n אפשרויות לבחור את $f(a_1)$ (f היא פונקציה). לאחר שבחרנו, יש n אפשרויות לבחור את $f(a_2)$. אם נמשיך, נקבל שיש $\underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$ דרכים לבחור את f. כלומר, יש n^k פונקציות.

ח. מספר יחסי הסדר המלאים על קבוצה בת n איברים שווה למספר הדרכים לסדר n איברים שונים בשורה (נסדר אותם מהקטן לגדול, וזה קובע את יחס הסדר). לכן, יש $n!$ יחסי סדר מלאים כאלה. מספר הפונקציות החח"ע מקבוצה עם $n!$ איברים לקבוצה עם m איברים הוא כמו מספר הדרכים לבחור $n!$ איברים מתוך m עם חשיבות לסדר. לכן, התשובה היא $\frac{m!}{(m-n!)!}$ אם $n! \le m$ ו-0 אם $n! > m$ (אין פונקציות חח"ע במקרה זה).

ט. נסמן $B_0 = \operatorname{im}(f)$ ותהי $f_0: A \to B_0$ הפונקציה המתקבלת מ-f ע"י שינוי הטווח של f ל-$\operatorname{im}(f)$. אזי f_0 חח"ע ועל ולכן הפיכה. $g: B \to A$ היא הופכית משמאל של f $\Leftrightarrow$ $g(f(a)) = a$ לכל $a \in A$ $\Leftrightarrow$ $g(b) = f_0^{-1}(b)$ לכל $b \in B_0$ $\Leftrightarrow$ $g|_{B_0} = f_0^{-1}$. לכן, מספר הפונקציות ההופכיות משמאל של f הוא מספר הפונקציות $g: B \to A$ כך ש-$g|_{B_0} = f_0^{-1}$. מספר הדרכים לבחור את g הוא כמו מספר הדרכים לבחור פונקציה $g: B \setminus B_0 \to A$ (כי g כבר נתונה על B_0) ולפי סעיף ז, זה שווה ל-$|A|^{|B\setminus B_0|} = n^{m-n}$.

י. אין פיתרון "נקי". נסמן את המספר הראשון ב-x ואת השני ב-y. עבור $i \in \{0,1,2\}$ נסמן ב-A_i את קבוצת המספרים בין 1 ל-100 הנותנים שארית i בחלוקה מ-3. אזי בדיוק אחד משלושה המקרים הבאים אפשרי:
(א) $x \in A_0, y \in A_0$ (ב) $x \in A_1, y \in A_2$ (ג) $x \in A_2, y \in A_1$.
ולכן, מספר הזוגות (x,y) הוא $|A_0 \times A_0| + |A_1 \times A_2| + |A_2 \times A_1|$. היות ו-$|A_0| = |A_2| = 33$ ו-$|A_1| = 34$, מספר הזוגות הוא $33\cdot 33 + 34\cdot 33 + 33\cdot 34 = 101\cdot 33 = 3333$.

יא. קודם נספור כמה זוגות (x,y) יש כך ש-$x = y$. בהכרח $x \in A_0$ (אחרת $x + y = 2x$ לא מתחלק ב-3) ולכן יש $|A_0| = 33$ אפשרויות. לכן, מספר הזוגות (x,y) עם $x \ne y$ הוא $3333 - 33 = 3300$. אם אין חשיבות לסדר אז כל זוג כזה נספר פעמיים ולכן יש 1650 קבוצות מהצורה $\{x,y\}$ עם $x \ne y$. נוסיף להן את 33 הקבוצות $\{x,y\}$ עם $x = y$ ונקבל 1683 אפשרויות.

יב. מספר תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n הוא 2^n. מספר תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n הוא $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. מספר תתי הקבוצות בגודל 3 או יותר של קבוצה בגודל n שווה ל-[מספר כל תתי הקבוצות] פחות [מספר תתי הקבוצות בגודל 0] פחות [מספר תתי הקבוצות בגודל 1] פחות [מספר תתי הקבוצות בגודל 2] ולכן שווה ל-$2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} - \binom{n}{2} = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2} = 2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$.

יג. תת קבוצה של $A \cup B$ לא מכילה אף איבר מ-A אם ורק אם היא מוכלת ב-$(A \cup B) \setminus A = B \setminus A = B$. באותו אופן, תת קבוצה של $A \cup B$ לא מכילה אף איבר מ-B אם ורק אם היא מוכלת ב-A. לכן, תתי הקבוצות של $A \cup B$ שלא מכילות איבר אחד לפחות של A ואיבר אחד לפחות מ-B הן $P(A) \cup P(B)$. כעת, $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) = P(\phi) = \{\phi\}$ ולכן $|P(A) \cup P(B)| = |P(A)| + |P(B)| - |\{\phi\}| = 2^n + 2^m - 1$. זה אומר שמספר תתי הקבוצות של $A \cup B$ המכילות לפחות איבר אחד מ-A ולפחות איבר אחד מ-B הוא $|P(A \cup B)| - |P(A) \cup P(B)| = 2^{n+m} - 2^n - 2^m + 1$.

יד. זה כמו סעיף יג, רק הפעם, תתי הקבוצות של $A \cup B$ שלא מכילות איבר מ-A ואיבר מ-B הן $P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A)$. לכן, מספר תת הקבוצות של $A \cup B$ שמכילות לפחות איבר אחד מ-

A ולפחות איבר אחד מ-B הוא $|P(A\cap B)|-|P(A\setminus B)\cup P(B\setminus A)|=2^{|A\cup B|}-$ $.(|P(A\setminus B)|+|P(B\setminus A)|-|P(\phi)|)=2^{n+m-k}-2^{n-k}-2^{m-k}+1$

טו. תהי A קבוצת הסידורים של $\{1,2,\dots,n\}$ בשורה בהם 1 מופיע משמאל ל-2 ותהי B קבוצת הסידורים של $\{1,2,\dots,n\}$ בשורה בהם 1 מופיע מימין ל-2. נגדיר פונקציה $f\colon A\to B$ שלוקחת סידור והופכת את המקום של 1 ו-2. אזי f פונקציה הפיכה (ההופכית של f מוגדרת כמו f אבל התחום שלה הוא B) ולכן $|A|=|B|$. נשים לב ש-$A\cup B$ היא קבוצת כל הסידורים של $\{1,2,\dots,n\}$ בשורה ולכן $|A\cup B|=n!$. בנוסף, $A\cap B=\phi$ ולכן $|A\cup B|=$ $|A|+|B|=2|A|$, כלומר $|A|=\frac{n!}{2}$.

שאלה 6

הוכיחו את אקסיומת הבחירה בעזרת עיקרון הסדר הטוב.

[הדרכה: יהי $\{Y_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות לא ריקות. נגדיר $X=\cup_{i\in I}Y_i$. השתמשו בעיקרון הסדר הטוב כדי לקבל יחס סדר מלא $\le$ על X כך ש-$(X,\le)$ סדורה היטב. העזרו בתכונות של $\le$ כדי לבנות פונקציה $f\colon I\to X$ כך ש-$f(i)\in Y_i$ לכל $i\in I$.]*

**ללא שימוש באקסיומת הבחירה!*

הוכחה

יהי $\{Y_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות ו-$X=\cup_{i\in I}Y_i$. לפי עיקרון הסדר הטוב קיים יחס סדר $\le$ על X כך ש-$(X,\le)$ סדורה היטב. לכן, לכל Y_i, קיים ב-Y_i איבר קטן ביותר (ביחס ל-$\le$), שנסמנו ב-$y_i\in Y_i$. איבר זה הוא בהכרח יחיד (לא ייתכנו שני איברים קטנים ביותר). נגדיר $f\colon I\to X$ ע"י $f(i)=y_i(=\min_{\le}Y_i)$. אזי f היא פונקציית בחירה כי לכל $i\in I$ מתקיים $f(i)=y_i\in Y_i$. **משל.**

הערה: לא השתמשנו בבניית f באקסיומת הבחירה כי בחרנו את האיברים בקבוצות $\{Y_i\}_{i\in I}$ באמצעות "נוסחה מפורשת" (שהשתמשה ביחס $\le$).