

20/09/15

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ה סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: מר ארז שיינר, ד"ר יונתן בק וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות בפירוט על כל חמשת השאלות, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון.

המחברות משמשות לטייטה בלבד, ולא תבדקנה.

שימו לב: יש סה"כ 120 נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
סה"כ	

בהצלחה

שאלה 1 (26 נק')

כל הקבוצות בשאלה זו הן תת קבוצות של קבוצה נתונה X .
לכל $A, U, V \subseteq X$ נגדיר פעולה בין שלושת הקבוצות ע"י:

$$U|A|V := (U \cap \bar{A}) \cup (V \cap A)$$

(תזכורת: $\bar{A} = X \setminus A$ היא הקבוצה המשלימה)

א. (6 נק') הוכיחו כי $U \cap V \subseteq U|A|V \subseteq U \cup V$.

ב. (4 נק') הוכיחו כי $U|A|V = V|\bar{A}|U$.

ג. (6 נק') הוכיחו כי $(U|A|V) \cap A = V \cap A$.

ד. (10 נק') יהיו $Q := U|\bar{A}|V, P := U|A|V$ הוכיחו כי $P|A|Q = U$ ו $P|\bar{A}|Q = V$.

רמז לסעיף ד: השתמשו בסעיפים ב, ד.

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 2 (28 נק')

סעיף א (16 נקודות)

תהי A קבוצה. יהיו S ו- R יחסי שקילות על A .
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. $R \cup S$ יחס שקילות.

ii. $((A \times A) \setminus R) \cup I_A$ יחס שקילות.

($I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ אז $A = \{1, 2, 3\}$ לדוגמה אם)

סעיף ב (12 נקודות)

תהיינה קבוצות A, B ותהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. נניח כי $D_1, D_2 \subseteq B$ וכי $C_1, C_2 \subseteq A$.

i. הוכיחו/הפריכו: $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$

ii. הוכיחו/הפריכו: $f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

שאלה 3 (20 נק')

סעיף א (10 נקודות)

ציירו גרף פשוט G , עם 5 קודקודים כך שגם ב G וגם ב \bar{G} אין שלושה קודקודים המחוברים זה לזה.

(תזכורת: הגרף המשלים \bar{G} הוא גרף עם אותם הקודקודים של G , ובין שני קודקודים ב \bar{G} יש צלע אם"ם אין צלע בין שני הקודקודים הללו ב G .)

סעיף ב (10 נקודות)

יהי G גרף פשוט עם 6 קודקודים. הוכיחו שב G או ב \bar{G} ישנם שלושה קודקודים המחוברים זה לזה.

(רמז: בחרו קודקוד אקראי וחלקו למקרים בהם הדרגה שלו קטנה שווה ל 2 או גדולה מ 2.)

דף נוסף לשאלה מספר _____

שאלה 4 (20 נק')
(הוכחת משפט מההרצאה)

תהי פונקציה $f: A \rightarrow B$. הוכיחו כי f הפיכה אם"ם f חח"ע ועל

שאלה 5 (26 נק')

סעיף א (14 נקודות)

נביט ביחס R על אוסף הפונקציות $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}\}$ המוגדר ע"י

$$fRg \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : f(n) - g(n) \neq (-1)^n$$

- i. (8 נק') הוכיחו כי R יחס סדר חלקי.
- ii. (3 נק') קבעו האם R יחס סדר **מלא** והוכיחו את קביעתכם.
- iii. (3 נק') מצאו את האיבר הקטן ביותר והאיבר הגדול ביותר ב $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ לפי R אם הם קיימים, אחרת הוכיחו שאינם קיימים.

סעיף ב (12 נקודות)

נביט ביחס השקילות R על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י $ARB \Leftrightarrow |A| = |B|$.
מצאו את כל העוצמות האפשריות של מחלקות השקילות של R , הוכיחו.
(אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות.)

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר _____