

מבוא לתורת החבורות תרגיל 11

1. מה סדר ת"ח 2-סילו של חבורה מסדר 80?

2. הדגם את משפט קיילי על $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

3. תהי G חבורה סופית ויהי $g \in G$ איבר מסדר k . הוכיחו שהתמורה ש g יוצר לפי משפט קיילי שווה למכפלה של מחזורים מאורך k .

4. תהי G חבורה פשוטה מסדר n כאשר $n > 2$. הוכיחו כי קיים שיכון $G \hookrightarrow A_n$.

5. נתבונן בחבורת הסימטריה S_p עבור p מספר ראשוני.

(א) כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

(ב) חשבו בעזרת סעיף א' את מספר התת-חבורות מסדר p ב S_p .

(ג) היעזרו בסעיף הקודם כדי להוכיח כי לכל מספר ראשוני p מתקיים

$$(p-1)! \equiv (-1) \pmod{p}$$

זהו משפט וילסון.

6. תהי G חבורה מסדר 55 שיש בה יותר מ-4 איברים מסדר 5. הוכיחו כי G אינה אבלית.

7. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו- n_3 מספר התת-חבורות 2-סילו ו 3-סילו בהתאמה.

(א) מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

(ב) מהם ערכי n_3 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

(ג) האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?

8.

(א) הוכיחו שכל חבורה מסדר 50 היא לא פשוטה.

(ב) הוכיחו שכל חבורה מסדר 42 היא לא פשוטה.

9. הוכיחו שכל חבורה מסדר 56 אינה פשוטה.