<u>אלגברה לינארית 1 – קיץ תשע"א – מערך תירגול 7</u>

עבור מטריצה $A \in F^{m \times n}$ הגדרנו שלושה מרחבים עיקריים :

<u>1.מרחב השורות של המטריצה</u> – המרחב הנפרש על ידי שורות המטריצה :

$\boldsymbol{R(A)} \coloneqq \boldsymbol{span\{R_1(A), \dots, R_n(A)\}} \subseteq F^{\boldsymbol{n}}$, ומתכונות כפל מטריצות מרחב זה ניתן לתיאור גם כווקטורים מהצורה : $\{A^t v | v \in F^m\}$

<u>2. מרחב העמודות של המטריצה</u> – המרחב הנפרש על ידי עמודות המטריצה:

$\boldsymbol{C(A)} \coloneqq \boldsymbol{span\{C_1(A), \dots, C_n(A)\}} \subseteq F^{\boldsymbol{m}}$, ומתכונות כפל מטריצות , מרחב זה ניתן לתיאור גם כווקטורים מהצורה : $\{Av | v \in F^n\}$.

<u>3. מרחב האפס של המטריצה</u> – זהו מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$ ונסמן אותו : $\boldsymbol{N(A)} \coloneqq \{\boldsymbol{x} \in F^{\boldsymbol{n}} | \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$.

<u>הגדרה</u> – **דרגת המטריצה *A*** שווה למספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת שלה , ומספר זה מסומן כ: $rank(A)$.

משפט: $rank(A) = dimR(A) = dimC(A) = n - dimN(A)$,

(דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים התלויים בעוד מרחב האפס שווה למספר המשתנים החופשיים !) .

*איך נמצא את שלושת מרחבי המטריצה ?

<u>אלגוריתם למציאת מרחבי העמודה , שורה והאפס של מטריצה :</u>

1.נדרג את המטריצה (קנונית לפישוט החישובים) .

2.השורות השונות מאפס בצורה מדורגת הן בסיס למרחב העמודות.

3.העמודות במטריצה המקורית שבהן יש איבר מוביל בצורה המדורגת , מהוות בסיס למרחב העמודות.

4.נציב פרמטרים במקום המשתנים החופשיים

5.נמצא פיתרון כללי בעזרת הפרמטרים החופשיים .

6.נפרק את הפיתרון הכללי לצירוף לינארי של וקטורים קבועים מוכפלים בפרמטרים.

7.הוקטורים הקבועים מ- 6 מהווים בסיס למרחב האפס.

<u>דוגמא</u>:

נסתכל על מטריצה: $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&0&2\end{pmatrix}$ מעל הממשיים ונרצה למצוא בסיסים למרחבי השורה , עמודה והאפס שלה . נדרג את המטריצה :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1&1\\0&\mathbf{1}&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

מכאן כבר נוכל להסיק כי מימד מרחב השורות/עמודות שווה ל-2 כמספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת.

<u>מרחב שורה :</u>

מרחב השורה של המטריצה המקורית נפרש על ידי השורות השונות מאפס בצורה המדורגת : $R(A)=span\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$.

<u>מרחב עמודה:</u>

רואים כי במטריצה <u>שהתקבלה אחרי דירוג</u> , איברים פותחים מופיעים בעמודות הראשונה והשנייה ולכן העמודות הראשונה והשנייה במטריצה <u>**המקורית**</u> מהוות בסיס למרחב העמודה , כלומר: $C(A)=span\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$

<u>מרחב האפס :</u>

דירגנו את המטריצה וקיבלנו שהמשתנים השלישי והרביעי חופשיים . נציב במקומם פרמטרים s,t ונקבל אחרי חילוץ האחרים את הפיתרון הכללי :

$\{(-t-s,t-s,t,s)|t,s\in\mathbb{R}\}$. נוכל לכתוב קבוצה זו כאוסף האיברים :

$t(-1,1,1,0)+s(-1,-1,0,1)$, ושני הוקטורים הקבועים הנכפלים כאן מהווים בסיס למרחב האפס: $N(A)\coloneqq span\{(-1,1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$

(וקטורים קבועים אלו הם בסיס למרחב האפס כי בהינתן צירוף לינארי מתאפס שלהם,ואם נניח כי וקטורים אלו מהווים שורות של מטריצה , אז , מכיוון שמקדמי הצירוף נמצאים בעמודות שונות - הם חייבים להתאפס !).

<u>**עבור מטריצה A , המספרים הבאים שווים :**</u>

1.דרגת המטריצה 2.מימד מרחב העמודות 3.מימד מרחב השורות 4.מספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת 5.מספר האיברים הפותחים

6.מספר עמודות הציר 7.מספר המשתנים התלויים .

*<u>*המספרים הבאים שווים זה לזה*</u> : מספר המשתנים החופשיים ומימד מרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית המוגדרת בעזרת המטריצה.

<u>**מסקנה:**</u> מכיוון שמספר המשתנים החופשיים ועוד מספר המשתנים התלויים שווה לסך כל המשתנים , וזהו מספר העמודות במטריצה , נקבל שדרגת המטריצה ועוד מימד מרחב הפתרונות שווה למספר העמודות!

<u>**תרגיל :**</u>

הוכיחו כי לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (ממשית !) מתקיים :

$F^n = R(A) \oplus N(A)$.

<u>**פתרון**</u> לפי המסקנה האחרונה מתקיים : $dimR(A) + dimN(A) = n$

ולכן לפי משפט המימדים עבור סכום תתי מרחבים נותר להראות כי חיתוך המרחבים בסכום הינו וקטור האפס.

נניח וקיים וקטור v ששייך גם למרחב האפס וגם למרחב השורות .מכיוון ששייך למרחב השורות , ניתן להפעיל על המטריצה פעולות שורה כך שאחת משורות המטריצה שמתקבלת תהיה שווה לאותו v . נניח , בלי הגבלת הכלליות , כי המטריצה המתקבלת היא B וכי הוקטור v מהווה את השורה הראשונה שלה .

v במרחב האפס של המטריצה A (כך הנחנו) ולכן במרחב האפס של המטריצה B , כלומר קיים $Bv = 0$. אך מכפל מטריצות נקבל כי האיבר הראשון במכפלה שווה ל- $R_1(B)v = v^t v = 0$, וראינו כי עבור וקטורים ממשיים זה גורר שהוקטור v הינו וקטור האפס !

תרגיל – יישום פעולות שורה למציאת השלמת וקטורים לקבוצה פורשת:

נניח שנתונים וקטורים ב F^n ונרצה להוסיף להם וקטורים כדי שקבוצת הוקטורים המתקבלת תפרוש את המרחב .

<u>**אלגוריתם:**</u>

1.נשים את הוקטורים בשורות מטריצה .

2.נדרג את המטריצה .

נוסיף לקבוצת הוקטורים , וקטורים "סטנדרטיים" בעלי "1" שצורת כל אחד היא "1" אחד והשאר אפסים , כשמיקום ה"1" הוא במיקום איברים שאינם מובילים.

(סיבה שזה עובד: נוסיף לוקטורים בצורה מדורגת וקטורים אחרים כך שהמטריצה המתקבלת תהיה עדיין מדורגת ושורות מטריצה מדורגת הן בלתי תלויות לינארית) .

דוגמא:

עבור הוקטורים שהרכיבו את המטריצה כמקודם:

$\{(1,0,1,1),(2,1,1,3),(1,1,0,2)\}$

נשים וקטורים אלו כשורות מטריצה ונדרג :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1&1\\0&\mathbf{1}&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

כעת אם נוסיף לוקטורים המקוריים את שני הוקטורים

$u=(0,0,0,1)$, $v=(0,0,1,0)$, נקבל שקבוצת הוקטורים :

$\{(1,0,1,1),(2,1,1,3),(1,1,0,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ פורשת את המרחב $\mathbb{R}^4$

הוכחנו בשיעור כי:

$rank(AB)\le\min\{rank(A),rank(B)\}$, $rank(A)=n$ עבור מטריצה מסדר n אם ורק אם היא הפיכה ,וכי מכפלה במטריצה הפיכה איננה משנה את הדרגה של מטריצת המכפלה.

<u>תרגיל</u>

תהי $A\in F^{m\times m}$ עם $rank(A)=m-1$. הוכיחו שאם למערכת $Ax=0$ קיימים פתרונות אזי כל שני פתרונות הם פרופורציונליים (כלומר אחד כפולה של השני).

<u>פתרון</u>

מכך ש $rank(A)=m-1$ נסיק כי למרחב הפתרונות של $Ax=0$ יש מימד $m-rank(A)=1$, ולכן יש וקטור $v\in F^m$ שונה מאפס שפורש את המרחב.

כלומר נסיק כי $N(A) = span\{v\}$ או , שכל וקטור במרחב הפיתרון הוא מהצורה $av\ , a \in \mathrm{F}$. אם w_1, w_2 שני פתרונות אז קיימת להם הצגה:

$w_1 = a_1 v\ , w_2 = a_2 v$ אם שני המקדמים a_i אפסים אז נקבל ששני הוקטורים w_i אפסים (אחד כפולה באפס של השני ...) . אחרת , נניח למשל כי $a_1 \neq 0$, ונקבל כי $w_2 = a_2 v = a_2 \frac{1}{a_1} w_1$, אחד כפולה של השני, כנדרש.

<u>תרגיל</u>

א. עבור מטריצות $A, B \in \mathrm{F}^{n\ x\ n}$ ריבועיות כך ש: $rank(A) + rank(B) > n$

יש להוכיח כי $AB \neq 0$.

ב. עבור מטריצה $A \in \mathrm{F}^{n\ x\ n}$ כך ש: $A^2 = 0$, הוכיחו כי $C(A) \subseteq N(A)$.

<u>פתרון :</u>

א.נניח אחרת כי $AB = 0$. כלומר $AB = \left(AC_1(B), \ldots, AC_n(B)\right) = 0$, כלומר כל עמודות B שייכות למרחב האפס של A ומכאן : $C(B) \subseteq N(A)$.

מכאן נסיק כי $rank(B) = dim\ (C(B)) \leq \dim\ (N(A))$.

בנוסף , ראינו כי תמיד מתקיים: $rank(A) + \dim\big(N(A)\big) = n$.לכן השיוויון הזה ואי השיוויון לפניו נקבל:

$rank(B) \leq n - rank(A) \ \Rightarrow rank(A) + rank(B) \leq n$, בסתירה לנתון.

מש"ל!.

ב.מהנתון נסיק כי $A \cdot C_i(A) = 0\ , for\ i = 1 \ldots n$,כלומר כל עמודת המטריצה שייכת למרחב האפס , ולכן $C(A) \subseteq N(A)$, כנדרש.

נזכיר את (11.11) מהשיעור : הבאים שקולים עבור מטריצה A ריבועית מסדר n :

1. A הפיכה
2. לכל $b \in \mathrm{F}^n$ קיים פתרון יחיד ל- $Ax = b$
3. קיים $b \in \mathrm{F}^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד .
4. למערכת ההומוגנית שמגדירה המטריצה קיים רק פתרון יחיד – האפס.
5. עמודות המטריצה בת"ל .

6. $rank(A) = n$

7. שורות המטריצה בת"ל.

<u>תרגיל:</u>

תהי מטריצה A בעלת m שורות כך שלמערכת $Ax = b$ קיים פיתרון יחיד לכל וקטור $b \in \mathrm{F}^m$. יש להוכיח כי A ריבועית והפיכה .

<u>פתרון:</u>

נניח שלמטריצה יש n עמודות . מהתנאי על קיום פיתרון לכל וקטור $b \in \mathrm{F}^m$ נקבל כי מרחב העמודה שלה מקיים $C(A) = \mathrm{F}^m$ ומכאן כבר $\dim\big(C(A)\big) = m$

מכיוון שלכל וקטור $b \in \mathrm{F}^m$ הפיתרון הוא יחיד ,נקבל שאין משתנים חופשיים בכל פיתרון מערכת לא הומוגנית כזו (או על ידי כך שפיתרון כללי ללא הומוגנית שווה לפיתרון פרטי ללא הומוגנית סכום עם הפיתרון הכללי להומוגנית , אך כאן נקבל שרק האפס הוא פיתרון להומוגנית , לכן אין משתנים חופשיים בכל פיתרון הומוגנית/ לא הומוגנית). נסיק מכך כי $rank(A) = n$, מכיוון שכשנדרג את המטריצה A קנונית , זה יהיה מספר השורות השונות מאפס (שהרי אין משתנים חופשיים!).

מכל אלו נקבל :

$m = \dim\big(C(A)\big) = rank(A) = n$ ולכן המטריצה ריבועית והפיכה (מ- 11.11).

<u>תרגיל 11.15 מהחוברת:</u>

יהיו $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ מעל הממשיים.

א.יש לדרג את המטריצות $A, (A|b)$

ב.מהן דרגות המטריצות מא' והאם נובע שיש או אין פיתרון למערכת $Ax = b$?

ג.מהו מימד הפתרונות למערכת ההומוגנית המתאימה ?

ד.מצאו בסיס למרחב האפס של A

ה.בדקו שהוקטור $(1,-1,1,-1)$ פתרון למערכת $Ax = b$ ומצאו פתרון כללי למערכת זו.

<u>פתרון</u>

שימו לב להפרש הקבוע 4 בין איבר לזה מעליו – מה שעוזר בדירוג ... ונקבל בסוף צורה מדורגת: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

ב.מצורת המטריצה המדורגת – כולל הוקטור הנוסף – נקבל שקיים פיתרון כי

$rank(A) = rank(A|b)$, כמספר השורות שונות מאפס בצורה מדורגת!

ג.מימד מרחב הפתרונות להומוגנית הוא 2 (יש שני משתנים חופשיים!).

ד. בסיס למרחב האפס בעזרת המשתנים החופשיים ופרמטרים :

$$\{\begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} | t,s \in \mathbb{R}\}.$$

ה.פתרון כללי למערכת $Ax = b$ יהיה :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix}, with\ t,s \in \mathbb{R}.$$

<u>העתקות לינאריות</u>

יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F . פונקציה $\mathrm{T}: V \to W$ נקראת העתקה לינארית אם מתקיים :

$$T(u+v) = T(u) + T(v), for\ all\ u, v \in V$$

$$T(av) = aT(v), for\ all\ a \in \mathrm{F}, v \in V$$

(ובקיצור ראיתם שמספיק לבדוק כי מתקיים: $T(u+av) = T(u) + aT(v)$

<u>דוגמאות להעתקות לינאריות:</u>

1.העתקת האפס – שמעבירה את כל הוקטורים של מרחב V לוקטור האפס של מרחב W .

2.העתקת הזהות : $\forall v \in V. T(v) = v$ לינארית!

3. העתקה שמוגדרת בעזרת מטריצה: בהינתן $A \in \mathrm{F}^{m\,x\,n}$ נגדיר ,

$T: \mathrm{F}^n \to \mathrm{F}^m$ על ידי : $T(v) = Av$.

אז מתקיים : $T(au + v) = A(au + v) = aAu + Av = aT(u) + T(v)$.

*ראינו בשיעור כי העתקה לינארית מעבירה את וקטור האפס לוקטור האפס של מרחב המטרה!

<u>תרגיל :</u>

האם הפונקציה הבאה לינארית ? - $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ושדה הממשיים :

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^3 \\ b \end{pmatrix} \ ?$$

<u>פיתרון :</u>

$$T\left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

*דוגמא נוספת להעתקה לינארית :

$T: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ שמוגדרת על ידי : $T(f) = (f(-1), f(0), f(1))$.

<u>תרגיל 1-11</u>

נתונה העתקה לינארית $T: V \dashrightarrow W$. הוכיחו:

א.אם $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ קבוצה בת"ל – אז גם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל .

ב. אם T חד חד ערכית והקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצת וקטורים בת"ל , אז גם אברי הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל .

<u>פיתרון:</u>

א.נראה שצירוף לינארי מתאפס של ה- v_{i} יחייב שכל מקדמיו אפסים:

יהי $a_1v_1 + \cdots a_nv_n = 0$.נפעיל את ההעתקה על שני צידי השיוויון ונקבל :

$0 = T(0) = T(a_1v_1 + \cdots a_nv_n) = a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n)$, אך קיבלנו צירוף לינארי מתאפס של קבוצת הוקטורים הבת"ל $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$, ולכן כל מקדמיו אפסים! .

ב. יהי צירוף לינארי מתאפס $a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n) = 0$ כאשר $\{v_1, \ldots, v_n\}$

קבוצה בת"ל.נראה כי כל המקדמים בהכרח אפסים! מלנאריות נקבל:

$$0 = a_1T(v_1) + \cdots a_nT(v_n) = T(a_1v_1) + \cdots + T(a_nv_n) = T(a_1v_1 + \cdots a_nv_n)$$

מכך שלכל העתקה לינארית קיים $T(0) = 0$ ומחד חד ערכיות ההעתקה נקבל כי : $a_1v_1 + \cdots a_nv_n = 0$, ומכאן צירוף לינארי מתאפס של וקטורים בת"ל ולכן כל המקדמים אפסים ! כנדרש.

<u>תרגיל 1-12 .</u>

א.האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ שהיא "על"?

ב.האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ שהיא חד חד ערכית?

<u>פתרון</u>:

א. אם הייתה העתקה על כזו , אז נקבל קיום ארבעה וקטורים $v_i\, , i = 1,2,3,4$

ב- $\mathbb{R}^3$ כך ש: $T(v_i) = e_i$ כאשר e_i הוקטורים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^4$ עם "1" אחד במקום i ואפס אחרת.

אבל אז , מהתרגיל הקודם נקבל כי קבוצת ה v_i היא קבוצה של 4 וקטורים בת"ל במרחב 3 מימדי ... בסתירה !

ב. בדומה לא' , אם הייתה העתקה חד חד ערכית כזו , אז כשנפעיל אותה על קבוצת הוקטורים e_i הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^4$ נקבל מסעיף ב' בתרגיל הקודם כי 4 תמונות הוקטורים האלו יהיו קבוצה בת"ל במרחב 3 מימדי !