25.7.2021

אי-תלות, span ומה שבינהם.

1. ב $V=\mathbb{R}^2$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון: נשים לב ש $(\subseteq)$ ברור. נוכיח את הכיוון ההפוך $(\supseteq)$. יהא $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ וצ"ל

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

. צריך למצוא, שני סקלרים, α,β כך ש

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

יש לנו פה מערכת משוואות. למה?

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+2\beta\\2\beta\end{pmatrix}$$

ורוצים את השיוויון

$$\begin{pmatrix}\color{blue}{a}\\\color{red}{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\color{blue}{\alpha+2\beta}\\\color{red}{2\beta}\end{pmatrix}$$

שזה מערכת משוואות עם 2 משוואות (אחת לכחולה ואחת לאדומה) בשני נעלמים (α,β) ולכן צריך לדרג את

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&2&b\end{array}\right)$$

(שימו לב שלפי כפל עמודה:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

וגם מפה אפשר להגיע למערכת המשוואות $\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\color{blue}{a}\\\color{red}{b}\end{pmatrix}$). אנחנו רוצים למצוא את α,β ועושים זאת ע"י דירוג המערכת המתאימה. נדרג:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&2&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&1&\frac{b}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a-b\\0&1&\frac{b}{2}\end{array}\right)$$

ואפשר אכן לבדוק שמתקיים

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{b}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

וסיימנו. המחשה: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2.5)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

2. ב $V=\mathbb{R}^4$ האם

$$S=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

האם בת"ל? הציגו את $\operatorname{span}S$ כאוסף פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית.

פתרון:

- נתחיל בהצגת $\operatorname{span}S$כאוסף פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית: רוצים לשאול עבור אילו וקטורים $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

  מתקיים כי $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}S$?

  זה מתקיים אמ"מ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

לפי העמודה, זה שקול לכך שקיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(זוהי מערכת עם 4 משוואות, 4 נעלמים שהם $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$). כלומר, כדי לענות על השאלה, צריך לדרג את

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & x_2 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & x_3 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & x_4 \end{array}\right)$$

ולבדוק מתי יש פתרון, לא בהכרח יחיד. (ואז הפתרון הוא יהיה $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$). בעצם אנחנו מחפשים מתי אין שורת סתירה. נדרג ונבדוק (ונקצר ע"י חישובים מקדימים):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & x_2 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & x_3 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & x_4 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{-x_2+3x_1+x_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_4+4x_1-2x_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_4+x_3+5.5x_1-2.5x_2 \end{array}\right)$$

מתי זה קורה? אמ"מ $2x_4+x_3+5.5x_1-2.5x_2=0$. לסיכום: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}S$ אמ"מ $2x_4+x_3+5.5x_1-2.5x_2=0$.

או בכתיב אחר

$$\mathrm{span}S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_4+x_3+5.5x_1-2.5x_2=0 \right\}$$

המחשה: האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}S$? לא כי $2 \cdot 1 + 0 + 5.5 \cdot 1 + 0 = 7.5 \neq 0$. ואם נחזור על התליך: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{span}S$

אמ"מ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אמ"מ יש פתרון למערכת $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right)$ ולמערכת זאת אין פתרון כי אחרי דירוג

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5 \end{array}\right)$$

- כעת נבדוק האם S בת"ל? ניקח צירוף לינארי של איברי S שמתאפס

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונשאל האם בהכרח המקדמים **כולם** שווים 0? (אם כן, אז S בת"ל. אם לא, אז לא). זה שקול לשאלה (כמו מקודם) האם למערכת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

יש רק את הפתרון הטריוואלי (הפתרון שכל המשתנים, אצלנו $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, שווים לאפס). נדרג ונבדוק האם יש משתנה חופשי או לא (שורת סתירה לא יכולה להיות כי זה מערכת הומגונית) - אם יש משנה חופשי היא ת"ל אם אין משתנה חופשי היא בת"ל. טוב, כבר דירגנו:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ויש משתנה חופשי (המשתנה השלישי) ולכן למערכת יש פתרון לא טריוואלי ולכן S ת"ל.

(א) הערה: המעבר מהצגת משוואות להצגה span יותר פשוטה: למשל: הציגו את

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\mid\begin{cases}x_1-2x_3&=0\\x_1+2x_2-2x_4&=0\\x_1-3x_2-5x_3-x_4&=0\\-2x_1+4x_2+8x_3-2x_4&=0\end{cases}\right\}$$

ע"י span.

פתרון: פשוט "נפתור" את המערכת: נדרג את המערכת שמאפיינת את תת המרחב:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\1&2&0&-2&0\\1&-3&-5&-1&0\\-2&4&8&-2&0\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

ונסמן $x_3=t$ (המשתנה החופשי) ואז $x_4=0$ וגם $x_2=-t$ וגם $x_1=2t$ ולכן אוסף הפתרונות למערכת הוא

$$W=\left\{\begin{pmatrix}2t\\-t\\t\\0\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

(ב) תרגיל: יהא V מ"ו, ויהיו S_1,S_2 תתי קבוצות. הוכיחו: אם $S_1\subseteq S_2$ אז $\operatorname{span}(S_1)\subseteq\operatorname{span}(S_2)$.

הוכחה: נניח $S_1\subseteq S_2$ וצ"ל $\operatorname{span}(S_1)\subseteq\operatorname{span}(S_2)$. אני מקווה שראיתם שלכל S מתקיים ש $S\subseteq\operatorname{span}S$ וגם ש $\operatorname{span}S$ הוא ת"מ והוא הכי קטן (מבחינת הכלה) שמכיל את S. אצלנו:

$$S_1\subseteq S_2\subseteq\operatorname{span}S_2$$

ומכיוון ש $\operatorname{span}S_1$ הוא תת המרחב הכי קטן שמכיל את S_1 נקבל כי

$$\operatorname{span}S_1\subseteq\operatorname{span}S_2$$

כנדרש.

(ג) תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו S_1,S_2 תתי קבוצות. הוכיחו/הפריכו: $\operatorname{span}S_1\triangle\operatorname{span}S_2=\operatorname{span}(S_1\triangle S_2)$.

פתרון: נוכיח משהו יותר חזק: תמיד $\operatorname{span}S_1\triangle\operatorname{span}S_2\neq\operatorname{span}(S_1\triangle S_2)$ (ולכן אפשר לבחור איזה S_1,S_2 שבא לנו. למשל $S_1=S_2=\emptyset$). ב $\operatorname{span}(S_1\triangle S_2)$ יש את וקטור האפס כי span של משהו הוא ת"מ. מצד שני, מאותו נימוק וקטור האפס שייך גם ל $\operatorname{span}S_1$ וגם ל $\operatorname{span}S_2$ ולכן **לא** שייך ל $\operatorname{span}S_1\triangle\operatorname{span}S_2$ (בפרט $\operatorname{span}S_1\triangle\operatorname{span}S_2$ הוא לא ת"מ).

(ד) תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ נגדיר $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.

i. מצאו מטריצה שאינה שייכת ל $\mathrm{span}S$, אם אפשר.

פתרון: אם S היתה פורשת את V אז $4\le|S|$ (כי $\dim V=4$). לכן $\mathrm{span}S\ne V$ (כי S לא פורשת). ולכן אפשר למצוא $A\in V\backslash\mathrm{span}S$. נעשה זאת, בצורה דומה לתרגיל קודם, נאפיין את כל המטריצות שנמצאות ב $\mathrm{span}S$ ע"י משוואות: מתי $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in\mathrm{span}S$? אמ"מ קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1\begin{pmatrix}{\color{red}1}&1\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}{\color{red}2}&0\\1&3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}{\color{red}1}&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$$

זוהי מערכת משוואות! של 4 משוואות (לכל קורדניאטה, בעצם השיוון הזה הוא השיוון

$$\begin{pmatrix}{\color{red}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}&\alpha_1-\alpha_3\\\alpha_2+\alpha_3&\alpha_1+3\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$$

שיש בו 4 שיוויון) ו 3 משתנים ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) ולכן זה שקול לשאול מתי למערכת זאת יש פתרון (או מתי למערכת זאת, אין שורת סתירה אחרי דירוג). המערכת מפורשות:

$$\begin{cases}{\color{red}\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3}&=x_1\\\alpha_1-\alpha_3&=x_2\\\alpha_2+\alpha_3&=x_3\\\alpha_1+3\alpha_2&=x_4\end{cases}$$

או בכתיב מטריצי (שנדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x_1\\1&0&-1&x_2\\0&1&1&x_3\\1&3&0&x_4\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&x_1\\0&1&1&\frac{x_1-x_2}{2}\\0&0&-2&x_4-\frac{3x_1-x_2}{2}\\0&0&0&x_3-\frac{x_1-x_2}{2}\end{array}\right)$$

ולכן - מסקנה: $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in\mathrm{span}S$ אמ"מ אין שורת סתירה במערכת משוואות שקיבלנו שזה אמ"מ $x_3-\frac{x_1-x_2}{2}=0$. כלומר

$$\mathrm{span}S=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\mid x_3-\frac{x_1-x_2}{2}=0\right\}$$

ולכן $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\notin\mathrm{span}S$

ii. האם S בת"ל?

פתרון: כמו מקודם, נניח צ"ל (צירוף לינארי) שמתאפס באיברי S,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

וצריך לשאול האם בהכרח זהו הצ"ל הטריוואלי (כל המקדמים שווים לאפס). חישבו את הדירוג של המערכת המשוואות שמסתתרת פה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\cdots\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}{\color{blue}1} & 2 & 1 & 0\\ 0 & {\color{blue}1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & {\color{blue}-2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

שיש לה פתרון יחיד (אין שורת סתירה [כאילו דה, זה מערכת הומגנית], וללא משתנים חופשיים) והוא הפתרון הטריוואלי (כאילו דה, זה מערכת הומגנית שתמיד יש את הפתרון הטירוואלי).

(ה) תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}_2[x]$ נגדיר

$$p_1(x)=2+6x-5x^2$$
$$p_2(x)=1+2x-3x^2$$
$$p_3(x)=1-2x-5x^2$$

האם $p_1(x),p_2(x),p_3(x)$ בת"ל? אם לא, מצאו צ"ל לא טריוואלי שמתאפס.

פתרון: כמו מקודם, נניח צ"ל שמתאפס

$$\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)+\alpha_3p_3(x)=0+0x+0x^2$$

והשאלה היא האם בהכרח זהו הצ"ל הטרוואלי. גם פה יש לנו מערכת משוואות עם 3 משוואת (למקדם החופשי, מקדם של x ומקדם של x^2) ו 3 נעלמים $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.השיוון לעיל בצורה מפורשת הוא

$$\alpha_1\left({\color{red}2}+6x-5x^2\right)+\alpha_2\left({\color{red}1}+2x-3x^2\right)+\alpha_3\left({\color{red}1}-2x-5x^2\right)=0+0x+0x^2$$

נפשט את אגף שמאל

$$\left({\color{red}2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)+\left(6\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3\right)x+\left(-5\alpha_1-3\alpha_2-5\alpha_3\right)x^2={\color{red}0}+0x+0x^2$$

שיוויון זה קורה אמ"מ יש שיווין בכל מקדם בנפרד, כלומר נקבל את המערכת

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 0\\ 6\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3 &= 0\\ -5\alpha_1-3\alpha_2-5\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

נדרג את המערכת ונבדוק האם יש משתנה חופשי (אין שורת סתירה כי זוהי מערכת הומגנית, ואם יש משתנה חופשי יש פתרון לא טריוואלי. ואם אין משתנה חופשי יש רק פתרון יחיד שהוא הטריוואלי): נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0\\ 6 & 2 & -2 & 0\\ -5 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו שיש משתנה חופשי ולכן יש פתרון לא טירוואלי. למשל $\alpha_1=2,\alpha_2-5,\alpha_3=1$ ואתם מוזמנים לבדוק שאכן

$$2\cdot p_1(x)+(-5)\cdot p_2(x)+1\cdot p_3(x)=0+0x+0x^2$$

(ו) תרגיל: יהא V מ"ו ויהיו $v_1,\ldots,v_n$ וקטורים. הוכיחו: אם $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל אזי הוקטורים $v_1,v_2+v_1,v_3+v_1,\ldots,v_n+v_1$ גם בת"ל.

פתרון: מניחים $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל וצ"ל $v_1,v_2+v_1,v_3+v_1,\ldots,v_n+v_1$ בת"ל.

כמו קודם, ניקח צ"ל שמתאפס

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2\left(v_2+v_1\right)+\cdots+\alpha_n\left(v_n+v_1\right)=0$$

ונוכיח שבהכרח זהו הצ"ל הטריוואלי. נציג את צד שמאל יותר נח (לפי ה vים):

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\right)v_1+\left(\alpha_2\right)v_2+\cdots+\left(\alpha_n\right)v_n=0$$

זהו צ"ל של $v_1,\ldots,v_n$ שמתאפס. אנחנו יודעים ש $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל ולכן המקדמים של הצירוף הם אפסים. כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n &= 0\\ \alpha_2 &= 0\\ \vdots\\ \alpha_n &= 0 \end{cases}$$

ונשים במטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \to I$$

ולכן יש רק את הפתרון הטריוואלי שהוא $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ כמו שרצינו.