טופולוגיה תרגיל 10

1. הוכח/הפרך: אם $A,B\subseteq X$ קשירים מסילתית ו$A\cap cl(B)\neq\emptyset$ אז $A\cup B$ קשיר מסילתית.

פתרון: הפרכה:ההפרכה היא למעשה הדוגמא הקלאסית של מרחב קשיר שאינו קשיר מסילתית.

נקח $A=\{(x,\sin\frac{1}{x}):0<x<1\}$.

$B=\{(0,y):-1<y<1\}$.

אזי AוB קשירים מסילתית, $B\cap\bar{A}\neq\emptyset$, אולם כידוע $A\cup B$ לא קשיר.

2. הוכח: כל תת קבוצה אמיתית צפופה ב$\mathbb{R}$ לא קשירה.

פתרון: תהי $A\subsetneq\mathbb{R}$ צפופה.

בפרט, קיים $r\in\mathbb{R}\setminus A$. נסתכל על $A\cap(-\infty,r)$, $A\cap(r,\infty)$.

ברור שזהו פירוק של A, והוא לא טריוויאלי כי A צפופה, כלומר, נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בR, ולכן הקבוצות לא ריקות.

3. א.הוכח: אם $f:A\to B$ הומיאומורפיזם, אז f מעבירה רכיב קשירות לרכיב קשירות.

ב. הסיקו ש totally dissconnected היא תכונה טופולוגית. (כלומר, נשמרת תחת הומיאומורפיזם)

פתרון:

א. יהי $C\subseteq A$ רכיב קשירות. f רציפה ולכן $f(C)\subseteq B$ קשירה. נניח שאינה מקסימלית. אז יש D כך ש $f(C)\subsetneq D$ קשירה.

f^{-1} חח"ע ועל ולכן $C=f^{-1}(f(C))\subsetneq f^{-1}(D)$. כמו כן, f^{-1} רציפה, לכן $f^{-1}(D)$ קשירה, בסתירה לכך ש C קשירה מקסימלית.

ב. יהי X מרחב totally dissconnected ו $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם. לפי סעיף 1 f מעבירה רכיב קשירות רכיב קשירות, לכן רכיבי הקשירות של Y הם רק הנקודונים. כלומר, Y הוא totally dissconnected.

4. הוכיחו/הפריכו:

א. מכפלה כלשהי של מרחבים שכולם ממידה אפס היא גם ממידה אפס.

ב. מכפלה כלשהי של מרחבים שכולם totally dissconnected היא גם totally dissconnected.

פתרון:

א. יהיו $\{A_i\}$ מרחבים ממידה 0, ויהיו $\{O_{ji}\}_{j\in J_i}$ הבסיסים הסגוחים שלהם בהתאמה.

ידוע שבסיס לטופולוגית המכפלה הוא קבוצות מהצורה: מכפלה של קבוצות פתוחות במספר סופי מהמקומות, ושל כל המרחב בשאר האינדקסים.

שימו לב שמספיק לקחת: מכפלה של קבוצות פתוחות בסיסיות במספר סופי מהמקומות, ושל כל המרחב בשאר האינדקסים. (חישבו למה זה נכון).

הקבוצות הפתוחות הבסיסיות בכל מרחב הן גם סגורות, ולכן קיבלנו שהבסיס מורכב ממכפלות של קבוצות סגורות.
הוכחנו בכיתה שמכפלה (אפילו אינסופית) של קבוצות סגורות היא סגורה, ולכן הבסיס מורכב מקבוצות סגוחות.
ב.יהיו $\{X_i\}$ מרחבים שכולם totally dissconnected. נסתכל על $A \subseteq \Pi X_i$ כך ש $|A| > 1$ ונוכיח שאינה קשירה.
יש בA לפחות שתי נקודות שונות $(x_i) \neq (y_i)$. נניח שהן שונות ברכיב הk.
נניח שA קשירה. אז ההטלה של A לרכיב הk היא תת קבוצה קשירה של X_k, מגודל גדול מ1. סתירה.

5.הוכיחו:
א. תת מרחב של מרחב ממימד 0 הוא גם ממימד 0.
ב. תת מרחב של מרחב totally dissconnectedהוא גם totally dissconnected.
פתרון:
א. יהי X מרחב ממימד 0 ו$A \subseteq X$, ויהי $\{O_i\}$ בסיס סגוח של X. ידוע ש $\{O_i \cap A\}$ הוא בסיס של A וכמובן שהוא סגוח בA.
ב. יהי X מרחב totally dissconnected ו$Y \subseteq X$. תהי $A \subseteq Y$ כך ש $|A| > 1$. X הוא totally dissconnected ולכן יש UוV פתוחות בX כך ש $A \cap U, A \cap V$ הוא פירוק לא טריוויאלי של A. כלומר, $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ וכן $(A \cap U \cap V) = \emptyset$.
אזי $U \cap Y \cap A, V \cap Y \cap A$ הוא פירוק לא טריוויאלי של A בתוך Y.

6. א. יהיו $A, B \subseteq X$ תתי קבוצות סגורות כך ש $A \cap B$ ו$A \cup B$ קשירים. הוכיחו ש A, B קשירים.
ב. הראו שאם נוריד את הדרישה שA וB סגורות, הטענה לא תהיה נכונה.
פתרון:
א. נוכיח שA קשירה. ההוכחה לB זהה.
נניח ש$A = U \cup V$ סגורות בA לא ריקות וזרות. אזי $A \cap B = (U \cap B) \cup (V \cap B)$ סגורות ב$A \cap B$ וזרות.
$A \cap B$ קשירה ולכן בה"כ $A \cap B = U \cap B$ ו $V \cap B = \emptyset$.
כעת $A \cup B = V \cup (U \cup B)$ סגורות ב $A \cup B$,לא ריקות וזרות (הן סגורות כי הנון שA וB סגורות במרחב כולו, ולכן גם UוV סגורות במרחב כולו ובפרט ב$A \cup V$). סתירה.
שימו לב שבאופן דומה יכולנו להוכיח במקרה ששתי הקבוצות היו פתוחות.
ב. נקח: $A = [0, 1) \cup [2, 3)$, $B = [1, 2) \cup [3, 4)$.
קל לראות שהחיתוך והאיחוד קשירים שכן $A \cap B = \emptyset$ ו $A \cup B = [0, 4)$. אולם גם A וגם B אינם קשירים.