חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: דר' הורוביץ
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל 2 - חסמים

שאלה 1

הוכיחו שהמספר $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ אינו רציונאלי (רמז: הוכיחו תחילה כי $\sqrt{21}$ אינו רציונאלי).

פתרון

נתחיל עם $\sqrt{21}$. נניח בשלילה שהוא רציונאלי ומהצורה $\sqrt{21}=\frac{m}{n}$ (שבר מצומצם). לכן $21n^2=m^2$. אגף שמאל מתחלק ב-3, ולכן גם אגף ימין מתחלק ב-3. נוכל להציג $m=3k$ ולהציב ולקבל: $21n^2=9k^2\rightarrow 7n^2=3k^2$. אגף ימין מתחלק ב-3, ולכן גם שמאל. אבל 7 לא מתחלק ב-3 ולכן בהכרח n^2 מתחלק ב-3. בסתירה לכך שהשבר היה מצומצם. (שימו לב שהיה אפשר להגיע לאותה סתירה גם עם הגורם 7.)

נמשיך עם $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. נניח בשלילה שהוא רציונאלי, אזי גם $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=10+2\sqrt{21}$ רציונאלי. ולכן גם $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2-10}{2}$ רציונאלי.

מש"ל

שאלה 2

יהי $x\in\mathbb{R}$ מספר ממשי המקיים $x\geq 0$. נניח בנוסף שמתקיים $x<\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$. הוכיחו או הפריכו: $x=0$.

פתרון

נניח בשלילה $x\neq 0$, לכן לפי הנתון $x>0$. ניקח $\varepsilon=\frac{x}{2}$, לכן $0<\varepsilon<x$ בסתירה לנתון ש**לכל** $0<\varepsilon$ מקיים $x<\varepsilon$.

שאלה 3

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שקיים $\varepsilon>0$ עבורו מתקיים $a>\varepsilon$ לכל $a\in A$. הוכיחו שאפס איננו החסם התחתון של A.

פתרון

נניח בשלילה שאפס הינו החסם התחתון של A. ניקח $0<\frac{\varepsilon}{2}$. ברור ש $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ולכן $\forall a\in A: a>\frac{\varepsilon}{2}$ כלומר $\frac{\varepsilon}{2}$ חסם מלרע גדול מאפס, בסתירה לכך שאפס הינו החסם מלרע הגדול ביותר.

<u>שאלה 4</u>

נתון ש- $S\subseteq T$. מה הקשר בין $\inf S$ לבין $\inf T$?

<u>פתרון</u>

יהי M חסם מלרע של T. אזי $\forall x\in T: x\geq M$. מכיוון ש- $S\subseteq T$ מתקיים $\forall x\in S: x\geq M$. לכן M חסם מלרע של S. $\inf T$ הינו חסם מלרע של T ולכן גם חסם מלרע של S. לכל N חסם מלרע של S מתקיים $\inf S\geq N$ ולכן $\inf S\geq \inf T$.

<u>שאלה 5</u>

מצאו חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים) של הקבוצות הבאות:

א. $A=\left\{1-\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$

ב. $B=\left\{(-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right): n\in\mathbb{N}\right\}$

<u>פתרון</u>

א. נוכיח ש-1 הינו חסם עליון. לשם כך נראה תחילה שהוא חסם מלעיל. מתקיים $\forall n\in\mathbb{N} \quad 1-\frac{1}{n}\leq 1$. נראה כעת שהוא מינימלי, כלומר, לכל $\varepsilon>0$, $1-\varepsilon$ אינו חסם מלעיל. יהי $\varepsilon>0$. אזי קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $\varepsilon>\frac{1}{n_0}$. מתקיים $1-\frac{1}{n_0}>1-\varepsilon$.

קל לראות ש-1 לא שייך לקבוצה ולכן אין מקסימום.
נוכיח ש 0 מינימום ובפרט חסם תחתון. ראשית אם מציבים $n=1$ נקבל ש $1-\frac{1}{n}=0$. כמו כן לכל $n\geq 1$ מתקיים $\frac{1}{n}\leq 1\rightarrow -\frac{1}{n}\geq -1\rightarrow 1-\frac{1}{n}\geq 0$. לכן אפס חסם מלרע השייך לקבוצה ומכאן הוא מינימום ובפרט חסם תחתון.

ב. נוכיח ש5 מקסימום ובפרט חסם עליון. לכל $n \geq 1$ מתקיים
$\left(-1\right)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right) \leq \left|\left(-1\right)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right| = 2+\frac{3}{n} \leq 5$ ועבור $n=1$ נקבל שוויון. לכן 5 הוא מקסימום.

נוכיח שהמינימום הוא $-3\frac{1}{2}$. עבור $n=2$ נקבל ש- $-3\frac{1}{2}$ שייך קבוצה. נותר להראות שזה חסם מלרע. צ"ל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
$-3\frac{1}{2} \leq \left(-1\right)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$. עבור האי-זוגיים הטענה ברורה. נוכיח עבור הזוגיים. עבור n זוגי האיבר הכללי הוא $-2-\frac{3}{n}$. מתקיים $\forall n \geq 2$ $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{2}$.
מכאן נקבל שלכל n זוגי $-\frac{3}{n} \geq -\frac{3}{2} \rightarrow -2-\frac{3}{n} \geq -3\frac{1}{2}$.

מש"ל

<u>שאלה 6</u>

יהיו A,B שתי קבוצות חסומות מלרע. נגדיר: $A+B=\left\{a+b : a \in A, b \in B\right\}$ ו- $A \cdot B=\left\{a \cdot b : a \in A, b \in B\right\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. $\inf\left(A+B\right)=\inf\left(A\right)+\inf\left(B\right)$
ב. $\inf\left(A \cdot B\right)=\inf\left(A\right) \cdot \inf\left(B\right)$

<u>פתרון</u>

<u>פתרון א:</u> הוכחה. צ"ל: $\inf\left(S+T\right)=\inf\left(S\right)+\inf\left(T\right)$

נוכיח שני אי-שוויונים:

$\geq$: לכל $s \in S$ מתקיים $s \geq \inf S$ וגם לכל $t \in T$ מתקיים $t \geq \inf T$. לכן $s+t \geq \inf S + \inf T$ לכל $s \in S, t \in T$, ומכאן $\inf\left(S+T\right) \geq \inf S + \inf T$.

$\leq$: על פי הטענה מהכיתה מספיק להוכיח שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:
$\inf\left(S+T\right) < \inf S + \inf T + \varepsilon$. זה שקול ל- $\inf\left(S+T\right) < \left(\inf S + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\inf T + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$\left(\inf S+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ אינו חסם מלרע של S ולכן קיים $s_0 \in S$ עבורו $\left(\inf S+\frac{\varepsilon}{2}\right)>s_0$.
באופן דומה קיים $t_0 \in T$ עבורו $\left(\inf T+\frac{\varepsilon}{2}\right)>t_0$. מאידך, ברור ש-
$\inf\left(S+T\right)\le s_0+t_0$, וזה מוכיח את הדרוש.

מש"ל

<u>פתרון ב:</u>

הפרכה:

$A=\{-2\},\ \ B=\{1,-5,7\}$
$\inf\ A=-2\,,\inf\ B=-5$
$\inf\left(A\cdot B\right)=-14$

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר $B=\{-a\mid a\in A\}$ הוכח ש B חסומה מלרע וש-$\inf B=-\sup A$.

<u>פתרון</u>

A חסומה מלעיל, נניח על ידי M כלומר $\forall a\in A: a\le M$ לכן $\forall a\in A: -M\le -a$ כלומר B חסומה מלרע ע"י $-M$. כמו כן, אם M הינו חסם המלעיל הקטן ביותר של A, וודאי ש $-M$ הינו חסם המלרע הקטן ביותר של B (קל להוכיח).

מש"ל