פתרון תרגיל 4 – מבוא לאלגברה לינארית

.1

פתרו את המשוואה הבאה עבור X: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

פתרון:

ננסה למצוא הופכי ל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ננסה לפתור

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וזה נותן שהמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (כן, כן, המטריצה היא ההופכית של עצמה.)

נכפול את שני האגפים של המשוואה בהופכי מצד שמאל

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

.2

ידוע ש $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

פתרו את המערכת הבאה (לא בשיטה של גאוס)

$$\begin{cases} 2x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

.פתרון:

נכניס את המערכת למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נכפול בהופכי מצד שמאל ונקבל : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

.3

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{-1}{2}R_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right]$$

המטריצה הפיכה, והמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] R_2 \leftarrow R$$

המטריצה הפיכה, והמטריצה ההופכית היא $\begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(ג) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

קבלנו שורת אפסים ולכן המטריצה לא הפיכה.

(ד) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftarrow -R_2]{R_3 \leftarrow \frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftarrow R_1 + R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3} \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

המטריצה הפיכה, וההופכית היא $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

.4

פתרון:

לפי טענה מהכיתה $A^{-1} = \rho_3(I)\rho_2(U)\rho_1(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

5. פתרו את מע' המשוואות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ע"י המטריצה ההופכית.

פתרון:
נכפול במטריצה ההופכית אותה מצאנו בשאלה הראשונה, כופלים מצד שמאל ומקבלים

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. קבעו האם הטענות הבאות הם אמת\שקר ונמקו את קביעתכם:

(א) אם במטריצה ריבועית A יש 2 שורות אותו דבר אז היא לא הפיכה.
אמת. במקרה כזה, נחסר שורה אחת מהשניה ונקבל שורת אפסים בדירוג.

(ב) אם האלכסון של מטריצה יש 1־ים אז המטריצה הפיכה.
שקר. למשל המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ לא הפיכה.

(ג) אם A מטריצה הפיכה אז גם A^{-1} ו־ A^2 הפיכות.
אמת. קל לראות ש $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ ו $\left(A^2\right)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = A^{-2}$.