ההעתקה הצמודה T^*

<u>הגדרה:</u> העתקה לינארית $T:V\to V$ (מעל F) נקראת "<u>אופרטור לינארי</u>"

המרחב של כל האופרטורים הלינאריים מסומן $Hom(V,V)$ והוא מ"ו מעל F.

<u>תזכורת:</u> המ"פ הסטנדרטית מעל $\mathbb{R}^n$: $\langle v,u\rangle = v^T\cdot u$

המ"פ הסטנדרטית מעל $\mathbb{C}^n$: $\langle v,u\rangle = v^T\cdot \bar{u}$

כאשר v,u וקטורי עמודה

<u>הגדרה:</u> אומרים שלאופרטור לינארי $T:V\to V$ (עבור V ממ"פ) יש "<u>אופרטור צמוד</u>" T^* של V אם:

$$\langle T(u),v\rangle = \langle u,T^*(v)\rangle \qquad \forall v,u\in V$$

<u>דוגמה:</u> (1) תהי $A_{n\times n}$ מטריצה ממשית, ונסתכל עליה כאופרטור לינארי על $\mathbb{R}^n$.

מי זו A^*?

$$\langle Au,v\rangle = (Au)^t\cdot v = u^tA^tv = \langle u,A^Tv\rangle$$

לכן $A^*=A^t$

(2) עבור $A_{n\times n}$ מטריצה מרוכבת נסתכל עליה כעל אופרטור לינארי מעל $\mathbb{C}^n$.

מי זו A^*?

$$\langle Au,v\rangle = (Au)^t\cdot \bar{v} = u^tA^t\bar{v} = \langle u,\bar{A}^tv\rangle$$

ולכן $A^*=\bar{A}^t$.

<u>הערה:</u> לכל אופרטור T <u>קיים</u> אופרטור צמוד והוא <u>יחיד</u>.

ונות:

1. $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

2. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$

4. $T^{**} = T$

5. $[T^*]_S = ([T]_S)^*$ עבור S בסיס א"נ (זה לא נכון בהכרח אם S לא א"נ)

תכונות נוספות הנובעות מהקודמות:

6. $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$

כי:

$$\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T^{**}(w)\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

7. $\langle T(v), T(v)\rangle \in \mathbb{R}$ גם אם V זה מ"פ עם מרוכבים

כי:

$$\langle T(v), T(v)\rangle \overset{\text{עפ"י קודם}}{=} \langle v, T^*T(v)\rangle$$

$$\overset{\text{תכונה 6}}{=} \langle T^*T(v), v\rangle$$

$$\overset{\text{תכונות מ"פ}}{=} \overline{\langle v, T^*T(v)\rangle}$$

תרגיל: $V=W=\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

יהי $T(x,y) = (2x+3y, 2y)$ העל"ל מ-V ל-V. מצאו T^*.

פתרון: אנו יודעים עפ"י תכונה 5 שעבור בסיס א"נ $[T^*]_S = ([T]_S)^*$.

ניקח בסיס א"נ ל-$\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$[T^*]_S \overset{\text{עפ"י}}{=} ([T]_S)^* = \left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_S \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_S\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}^* = \overline{\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}}^t = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2x, 3x+2y)$$

אופרטורים מיוחדים:

נורמלי: $T^*T = TT^*$ (צ"א אופרטור T נקרא נורמלי אם הוא מקיים הנ"ל)

אוניטרי: $T^* = T^{-1}$ (בפרט T הפיכה) צ"א $T^*T = \underline{I}$

[—♡— T אוניטרי $\Leftarrow$ T נורמלי כי: $T^*T = T^{-1}T = I = TT^*$]

צל"ע (צמוד לעצמו): $T^* = T$

[—♡— גם הוא נורמלי כי: $T^*T = TT = TT^*$]

אנטי סימטרי: $T^* = -T$

[—♡— גם הוא נורמלי]

הערות: ① אוניטרי בממשיים = או"ג

צ"א מטריצה A שהיא אוניטרית וממשית נקראת מטריצה אורתוגונלית.

② שמות נוספים לאופרטור צל"ע:

① צל"ע במרוכבים נקרא "הרמיטי"

כך גם מטריצה מרוכבת שמקיימת $A^* = A$ נקראת מטריצה הרמיטית.

② צל"ע בממשיים נקרא "סימטרי"

בממשיים A^* זה כמו A^t (כי אין משמעות לצמוד)

לכן מטריצה סימטרית זו מטריצה המקיימת $A^t = A$

שאלה: מה ניתן לומר על הע"ע של T, T^* בכל אחד מהמקרים הנ"ל?

תשובה:

נורמלי: תחילה נשים לב ש-

$$(*)\quad \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*T(v)\rangle \underset{\text{כי } T \text{ נורמלי}}{=} \langle v, TT^*(v)\rangle \underset{\text{תכונה 6}}{=} \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2$$

כעת, לכל λ ע"ע של A (שמייצגת T) ידוע:

$\exists v \neq 0 \quad (A-\lambda I)v = 0$

$\|A - \lambda I\| = 0$ כי $v \neq 0$. אז $A-\lambda I$ לא הפיכה

כעת, נסתכל על A^* עם $\bar{\lambda}$ (אותו λ מהע״ע הקודם).

$$\|(A^*-\bar{\lambda}I)v\| = \|(A-\lambda I)^*v\| \underset{\downarrow}{=} \|(A-\lambda I)v\| = 0$$

עפ״י ⊛ טע׳ קודם

ניתן להוכיח שגם הכיוון ההפוך נכון וסה״כ נקבל

$\boxed{\lambda \text{ ע״ע של } A \iff \bar{\lambda} \text{ ע״ע של } A^*}$ (עבור A נורמלי)

<u>אוניטרי</u>: במקרה זה כבר A הפיכה ולכן הע״ע $\lambda \neq 0$ ולכן קיים λ^{-1}

כעת ידוע

λ ע״ע של A $\iff$ λ^{-1} ע״ע של A^{-1}. (עם אותו ו״ע)*

*להזכרה: $Av=\lambda v$, $v=\lambda A^{-1}v$, $\lambda^{-1}v=A^{-1}v$

כיוון שאנו במקרה האוניטרי אז $A^*=A^{-1}$ $\overset{\text{לכן}}{\Longleftarrow}$ λ^{-1} ע״ע של A^*

בנוסף, ראינו אוניטרי $\Leftarrow$ נורמלי ולכן $\bar{\lambda}$ ע״ע של A^*

$$\bar{\lambda}=\lambda^{-1} \Rightarrow \bar{\lambda}\lambda = 1$$

$$|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|\lambda|=1}$$

<u>צמ״ע</u>: $A^*=A$ ולכן כל λ ע״ע של A גם ע״ע של A^*.

ובגלל הנורמליות (כי צמ״ע $\Leftarrow$ נורמלי) נקבל $\lambda=\bar{\lambda}$

$$\boxed{\lambda\in\mathbb{R}}$$

<u>אנטי-סימטרי</u>: ידוע λ ע״ע של A $\iff$ $(-\lambda)$ ע״ע של $-A$ (עם אותו ו״ע)

ראינו אנטי-סימטרי $\Leftarrow$ נורמלי ולכן $\bar{\lambda}=-\lambda$

$\Downarrow$

λ מדומה טהור

<u>משפט</u>: התנאים הבאים שקולים:

א. A אוניטרית.

ב. A מטריצת מעבר בין שני בסיסים א״נ

ג. עמודות A הן בסיס א״נ.

ד. שורות A הן בסיס א״נ

משפט: A ממשית, אז התנאים הבאים שקולים:

א. A אוניטרית

ב. A שומרת מ"פ ($\langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle$ ז"א)

ג. A שומרת אורך ($\|Av\| = \|v\|$ ז"א)

טענה: A נורמלי

צ"ל ו"ע השייכים לע"ע שונים, מאונכים.

הוכחה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \underset{\text{ראינו}}{\in} \mathbb{R}$ ע"ע שונים

$v_1, \dots, v_n$ הו"ע השייכים להם

אזי לכל $i \neq j$ מתקיים

$$\lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle \overset{\lambda_i \text{ ע"ע}}{=} \langle Av_i, v_j\rangle = \langle v_i, A^* v_j\rangle =$$

$$\overset{*}{=} \langle v_i, \bar{\lambda}_j v_j\rangle = \langle v_i, \cancel{\bar{\lambda}_j} v_j\rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle$$

* A נורמלי ולכן λ_j ע"ע של A $\Leftrightarrow \bar{\lambda}_j$ ע"ע של A^* עם אותו ו"ע

$$\Leftarrow \quad \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0 \text{ כי } \lambda_j \neq \lambda_i} \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle v_i, v_j\rangle = 0$$

$\Rightarrow v_i, v_j$ מאונכים!

משל [redacted]

כיוון שזה נכון עבור נורמלי אז זה גם נכון לאוניטרי וצ"ע!! כי אוניטרי $\Leftarrow$ נורמלי, צ"ע $\Leftarrow$ נורמלי.

בלי קשר לנושא הנוכחי...

טעות חוזרת שהרבה עושים: עבור סקלרים a,b אם $ab=0 \Rightarrow a=0$ או $b=0$

אבל זה לא נכון עבור וקטורים a,b!! לדוג':

$$(1,0)\binom{0}{1} = \binom{0}{0}$$

כנ"ל לא נכון עבור וקטור ומטריצה ועבור 2 מטריצות

Generated by CamScanner

דוג': כפי שראינו בהתחלה

אוניטרי (וגם אוג') , וצ"ע $\Leftarrow$ נורמלי

ההיפך לא נכון:

המקרה הממשי של אוניטרי

המקרה הממשי של צ"ע

① $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ אינה אוג' ואינה סימטרית

(בידקו זאת!)

אבל היא נורמלית כי: $A A^T = A^T A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $A^T = A^*$ כי אנחנו בממשיים,

המקרה המרוכב של צ"ע

② $A=\begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 2 & 4+2i \end{pmatrix}$ אינה אוניטרית ואינה הרמיטית

אבל היא כן נורמלית כי:

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} 8 & 8+8i \\ 8-8i & 24 \end{pmatrix}$$

סיכום:

$\boxed{\text{נורמלי}}$: $TT^* = T^*T$

תכונות: 1. λ ע"ע של T $\Leftarrow$ $\bar{\lambda}$ ע"ע של T^*.

2. ו"ע של ע"ע שונים הם מאונכים.

$\boxed{\text{אוניטרי}}$: $T^* = T^{-1}$ ולחילופין $T^*T = I$.

$\xrightarrow{R}$ אוג'

$\xrightarrow{C}$ אוניטרי

תכונות: 1. אוניטרי $\Leftarrow$ נורמלי. ולכן ע

2. ו"ע של ע"ע שונים מאונכים.

3. מטריצה A אוניטרית $\Leftrightarrow$ היא מטריצת מעבר בין שני בסיסים אוא"נ

$\Leftrightarrow$ עמודות A בסיס אוא"נ $\Leftrightarrow$ שורות A בסיס אוא"נ.

4. אם λ ע"ע של T אז $|\lambda|=1$

5. העתקה עם שמירת מ"פ ואורכים.

$\boxed{\text{צ"ע}}$: $T^*=T$

$\xrightarrow{R}$ סימטרי

$\xrightarrow{C}$ הרמיטי

תכונות: 1. צ"ע $\Leftarrow$ נורמלי. ולכן ע

2. ו"ע של ע"ע שונים הם מאונכים. (גם אם T במרוכבים)

3. אם λ ע"ע של T אז $\lambda \in \mathbb{R}$