תרגיל 5

15 בינואר 2017

1. א. הוכיחו: $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$.
ב. הוכיחו שהמשפחה $\{(A\setminus B),(B\setminus A),(A\cap B)\}$ זרה בזוגות.
פיתרון:

א. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)=((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\cup(A\cap B)=(A\triangle B)\cup(A\cap B)=((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cup(A\cap B)=A\cup B$

כאשר השיוויון הראשון נובע מקיבוציות האיחוד. השני והשלישי מהגדרות שקולות של הפרש סימטרי. השיוויון האחרון זה מתרגיל 3 שאלה 4 סעיף א, כיון ש $A\cap B\subseteq A\cup B$.

ב. ראשית:

$x\in(A\setminus B)\cap(B\setminus A)\iff(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in B\wedge x\notin A)\iff F$.

ולכן $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\phi$.

בנוסף:

$x\in(A\setminus B)\cap(A\cap B)\iff(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\in B)\iff F$.

ולכן $(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\phi$. באותו אופן בדיוק זה עובד עם $(B\setminus A)\cap(A\cap B)$.

2. תהיינה A,B קבוצות סופיות. הוכיחו שאם $|A|$ מספר זוגי ו־$|B|$ מספר אי־זוגי אז $|A\triangle B|$ מספר אי זוגי.
פיתרון:

נשים לב ש־ $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, וכיון ש $A\cap B\subseteq A\cup B$ נקבל, לפי תרגיל מהתרגול, ש $|A\triangle B|=|A\cup B|-|A\cap B|\overset{*}{=}|A|+|B|-|A\cap B|-|A\cap B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$, כאשר השיוויון $*$ נובע ממשפט ההכלה והדחה.

כעת, כיון ש $|A|$ מספר זוגי ו־$|B|$ מספר אי־זוגי אז הסכום שלהם הוא מספר אי זוגי, ואם מורידים ממנו מספר זוגי נשארים עם מספר אי זוגי.

3. לתכניות מתמטיקה ומדעי המחשב באוניברסיטה נרשמו בסה"כ 150 סטודנטים. ידוע ש־115 סטודנטים נרשמו למדעי המחשב, ו־42 למתמטיקה. כמה סטודנטים נרשמו

לדו ראשי "מתמטיקה ומדעי המחשב"?
פיתרון:

נסמן ב־A את קבוצת הנרשמים למתמטיקה, וב־B למדעי המחשב. נקבל

$$|A| = 42, |B| = 115, |A \cup B| = 150$$

ולכן, לפי הכלה והדחה נוכל לחשב את החיתוך:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 115 + 42 - 150 = 7$$

4. מצאו 3 חלוקות לקבוצה $A = \{1, 2, 15, a, aba\}$, לפי הגדרת "חלוקה" שהוגדרה בהרצאה.
פיתרון:

1. $\{\{1, 2\}, \{15\}, \{a, aba\}\}$.
2. $\{\{1, 2, 15, a, aba\}\}$.
3. $\{\{1, 2, aba\}, \{a, 15\}\}$.

5. תהיינה A, B קבוצות סופיות.
א. תנו דוגמא לכך שלא תמיד מתקיים השיוויון: $|A \setminus B| = |A| - |B|$.
ב. הוכיחו: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
ג. כפי שראינו, השיוויון בסעיף א לא תמיד נכון. מצאו, אם כן, את ההפרש: $|A \setminus B| - (|A| - |B|)$.
פיתרון:

א. כל דוגמא שבה $B \not\subseteq A$ טובה.

ב. $\subseteq$:

$$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in A \setminus (A \cap B)$$

כי מי שלא נמצא ב־B בודאי לא נמצא ב־$A \cap B$.

$\supseteq$: נניח $x \in A \setminus (A \cap B)$ לכן $x \in A \wedge x \notin A \cap B$, כעת אם בשלילה $x \in B$ אז מהעובדה ש $x \in A$ נובע ש־$x \in A \cap B$ בסתירה. לכן $x \notin B$ ובסה"כ נקבלש־$x \in A \setminus B$.

ג. ראינו ש־ $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, ושכיון שהן זרות אז $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$.
בנוסף, לפי שאלה 1 נקבל $|A \cup B| = |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A \setminus B| + |B|$.
כעת מנוסחת ההכלה והדחה נקבל:

$$|A \setminus B| + |B| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B \setminus A|$$

לאחר העברת אגפים נקבל

$$|A \setminus B| - (|A| - |B|) = |B \setminus A|$$