פתרון תרגיל 5

.1

הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול עפ"י קושי (כלומר בלשון $\varepsilon-\delta$):

(א) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-1}{2}=3$

בהינתן $\varepsilon>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-7|<\delta$ אז $\left|\frac{x-1}{2}-3\right|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=2\varepsilon$, ואז אם $0<|x-7|<\delta$ יתקיים

$$\left|\frac{x-1}{2}-3\right|=\left|\frac{x-7}{2}\right|=\frac{|x-7|}{2}<\frac{\delta}{2}=\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כדרוש.

(ב) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x-1}=0$

בהינתן $\varepsilon>0$ נרצה למצוא $M>0$ כך שלכל $x>M$ יתקיים $\left|\frac{2}{3x-1}-0\right|<\varepsilon$.

ניקח $M=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\varepsilon}$, ואז לכל $x>M$ מתקיים

$$x>\frac{1}{3}+\frac{2}{3\varepsilon}\ \Rightarrow\ 3x>1+\frac{2}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ 3x-1>\frac{2}{\varepsilon}$$

ולכן גם

$$\left|\frac{2}{3x-1}-0\right|=\frac{2}{3x-1}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

כדרוש.

(ג) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$

בהינתן $M>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אז $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>M$.

נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$, ואז אם $0<|x-1|<\delta$ יתקיים

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\geq\frac{1}{|x-1|^2}>\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}=M$$

כדרוש.

(ד) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

בהינתן $M>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $x>\delta$ אז $\sqrt{x}>M$.

נבחר $\delta=M^2$, ואז אם $x>\delta$ יתקיים

$$\sqrt{x}>\sqrt{\delta}=\sqrt{M^2}=M$$

כדרוש.

.2

הראו שהגבולות הבאים לא קיימים בעזרת הגדרת הגבול עפ"י היינה (סדרות):

א) $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$: נסמן $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n}} = 2^n \to \infty$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = -\frac{1}{n}$ מתקיים $y_n \to 0$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = 2^{\frac{1}{y_n}} = 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

לכן לפי היינה הגבול הנ"ל לא קיים (אפילו במובן הרחב).

ב) $\lim_{x\to 0} cos\left(\frac{1}{x}\right)$: נסמן $f(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ מתקיים $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = cos(2\pi n) = 1 \to 1$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$ מתקיים $y_n \to 0$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = cos(\frac{\pi}{2} + \pi n) = 0 \to 0$$

לכן לפי היינה נובע שהגבול הנ"ל לא קיים.

3.

(א)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-7x^2+5}{4x^3+x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^3}}{4+\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}}=\frac{1-0+0}{4+0-0}=\frac{1}{4}$$

(ב)

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1-x)(1+x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(1+x)-2}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{1+x}=-\frac{1}{2}$$

(ג) כיוון ש-$x\to-\infty$, מתקיים $x=-\sqrt{x^2}$ (שכן $x<0$), בעוד ששורש ריבועי כפי שהגדרנו אותו הוא תמיד **אי־שלילי**). לכן כשמחלקים מונה ומכנה בחזקה הגבוהה (x) מקבלים

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{2}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}=-\frac{1}{2}$$

4. א.

נכפיל ונחלק בצמוד של המונה:

$$lim_{n\to3}\frac{\sqrt{x^2+3x}-3\sqrt{2}}{x^2-7x+12}\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2}}=lim_{n\to3}\frac{x^2+3x-18}{(x^2-7x+12)\left(\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{2}\right)}=lim_{n\to3}\frac{(x+6)(x-3)}{(x-4)(x-3)}=-\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

ב.

נסמן $t=\pi-x$

$$lim_{x\to\pi}\frac{sin(x)}{x-\pi}=lim_{t\to0}\frac{sin(\pi-t)}{-t}=lim_{t\to0}\frac{sin(t)}{-t}=-1$$