

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 4: משפט נתר, משוואות המילטון כמערכת דינמית וסוגרי פואסון

1. הלגרנג'יאן של גוף בעל מסה m עם פוטנציאל $U(r) = -GMm/r$ נתון ע"י

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

(א) מצאו את ההמילטוניאן של הבעיה. האם הוא זהה לאנרגיה של המערכת?
 מדוע?

(ב) רשמו את משוואות התנועה של המילטון

(ג) רשמו את הלגרנג'יאן בקואורדינטות קרטזיות והראו כי הוא סימטרי תחת
 טרנספורמצית סיבוב $x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$

(ד) מצאו שמורה של טרנספורמצית הסיבוב. מהי שמורה זו?

(ה) חזרו על סעיף (ג) עבור פוטנציאל $U(r)$ כלשהוא. (רמז: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

2. חרוז בעל מסה m מאולץ לנוע על חישוק חסר מסה עם רדיוס R . החרוז מחובר
 לנקודה $(R, 0)$ באמצעות קפיץ בעל קבוע k עם אורך שווי משקל ℓ . המרחק בין
 החרוז לנקודה $(R, 0)$ הינו x .

(א) הראו כי הלגרנג'יאן נתון ע"י

$$\omega^2 = \text{כאשר } \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mR^2\Omega^2 \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2(2R \sin \frac{\theta}{2} - \ell)^2,$$

 $k/m, \Omega^2 = g/R$ (רמז: בטאו את x באמצעות R, θ).

(ב) רשמו את ההמילטוניאן.

(ג) רשמו את משוואות המילטון.

(ד) מצאו את נקודות שווי המשקל כאשר ידוע כי $\ell = R/2$. מהו התנאי לכך
 שתתקבל נקודת שווי משקל לא טריוויאלית?

3. ההמילטוניאן של אוסילטור הרמוני פשוט נתון ע"י $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. נציג כעת
 את המשתנים $a^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x - i\frac{p}{m\omega}\right), a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(x + i\frac{p}{m\omega}\right)$ סוגרי פואסון
 עבור שתי פונקציות $f(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t), g(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ מקיימים

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

- (א) בטאו את \mathcal{H} באמצעות a, a^* .
- (ב) חשבו את סוגרי פואסון $\{a^*, \mathcal{H}\}, \{a, \mathcal{H}\}, \{a, a^*\}$.
- (ג) רשמו את משוואות התנועה עבור a, a^* ופתרו אותן.
- (ד) בטאו את x, p באמצעות הפתרונות שקיבלתם.
- (ה) חשבו את $\{x, p\}$ ע"י שימוש בתוצאות (ד). השוו לחישוב הישיר