8.1 מטריקות קונפורמיות למטריקה שטוחה סטנדרטית

$(g_{ij}) = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ היא מטריקה שטוחה סטנדרטית

הגדרה

מטריקה (g_{ij}) היא <u>שקולה קונפורמית</u> למטריקה שטוחה סטנדרטית אם מתקיים

$$g_{ij} = \lambda\left(u^1, u^2\right)\delta_{ij}$$

כלומר

$$g_{11}\left(u^1, u^2\right) = g_{22}\left(u^1, u^2\right) = \lambda\left(u^1, u^2\right) \qquad g_{12}\left(u^1, u^2\right) = 0$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda\left(u^1, u^2\right) & 0 \\ 0 & \lambda\left(u^1, u^2\right) \end{bmatrix}$$

משטח סיבוב

המטריקה במשטח סיבוב אינה מטריקה שקולה קונפרומית:

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא אמנם אלכסונית, אבל לא סקלרית.

ניתן למצוא לספירה מטריקה שתהיה שקולה קונפורמית:

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}$$

$$\underline{x} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$x_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}$$

$(\underline{x}_1, \underline{x}_2, n)$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2g_{11}}\left(g_{il;j} - g_{ij;l} + g_{jl;i}\right) g^{lk}$$

$$\boxed{g_{il} g^{lk} = \delta_i^k}$$

הגדרה

$\lambda\left(u^1,u^2\right)$ נקראת גורם קונפורמי של המטריקה.

למה

אם $g_{ij}=\lambda\delta_{ij}$ אזי מתקיים

$$\Gamma'_{11}=\frac{\lambda_1}{2\lambda}\qquad\Gamma'_{22}=\frac{-\lambda_1}{2\lambda}\qquad\Gamma'_{12}=\frac{\lambda_2}{2\lambda}$$

כאשר $\lambda_i=\dfrac{\partial\lambda}{\partial u^i}$:

Γ^1_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$
$i=2$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$	$\frac{-\lambda_1}{2\lambda}$

Γ^2_{ij}	$j=1$	$j=2$
$i=1$	$\frac{-\lambda_2}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$
$i=2$	$\frac{\lambda_1}{2\lambda}$	$\frac{\lambda_2}{2\lambda}$

והנוסחה הכללית היא

$$\Gamma^1_{ij}=\frac{1}{2\lambda}(g_{i1;j}-g_{ij;1}+g_{j1;i})$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2\lambda}\left(\underbrace{g_{21;2}}_{0}-g_{22;1}+\underbrace{g_{21;2}}_{0}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2\lambda}g_{22;1}=\frac{-1}{2\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial u^1}(g_{22})=\frac{-1}{2\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial u'}(\lambda)=\frac{-\lambda_1}{2\lambda}$$

הערה

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

8.3 משוואת קו גאודזי על משטח

$$\mathbb{R}^2\xrightarrow{x}\mathbb{R}^3$$

$$x \circ \alpha = \beta$$

$$\beta(t) = x(\alpha(t))$$

$$\alpha(t) = \left(\alpha^1(t), \alpha^2(t)\right)$$

משפט

כל עקומה רגולרית β על M מקיימת זהות

$$\beta'' = \left(\alpha^{i'}\alpha^{j'}\Gamma^k_{ij} + \alpha^{k''}\right)x_k + \left(L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}\right)n$$

$$\beta'' = \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} \qquad \alpha^{i'} = \frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}$$

הוכחה

לפי הגדרה, $\beta = x \circ \alpha$.

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}$$

לפי נוסחת Leibniz

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x}{\partial u^i} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x \circ \alpha(t)}{\partial u^i}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial u^1}\frac{\mathrm{d}^2\alpha^i}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}\frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial x}{\partial u^i}\frac{\mathrm{d}^2\alpha^i}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\beta'' = x_{ij}d^{i'}\alpha^{j'} + x_i\alpha^{i''} = x_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} + x_k\alpha^{k''}$$

$$\left(x_{ij} = \Gamma^k_{ij}x_k + L_{ij}n\right)$$

$$\beta'' = \Gamma^k_{ij}x_k\alpha^{i'}\alpha^{j'} + L_{ij}n\alpha^{i'}\alpha^{j'}$$

$$\boxed{\beta'' = \left(\Gamma^k_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} + \alpha^{k''}\right)x_k + L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n}$$

הגדרה

עקומה $\beta = \underline{x} \circ \alpha$ נקראת קו גאודזי אם מתקיים אחד מן התנאים השקולים הבאים:

1. לכל $k = 1,2$ מתקיים $\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^{k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$
2. ווקטור β'' מאונך למשטח ומקיים $\beta'' = L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}$

דוגמה

במישור $\forall_{i,j,k}\Gamma_{ij}^{k} \equiv 0$:

$$\begin{array}{rl} \forall_k & \alpha^{k''} = 0 \\ \forall_k & \alpha^{k'}(t) = a^k \\ \forall(t) & \alpha^k(t) = a^k t + b^k \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha^1(t) = a^1 + b^1 \\ \alpha^2(t) = a^2 t + b^2 \end{cases}$$

הוכחה של שקילות

אם מתקיימת (1) אזי לפי המשפט הקודם

$$\beta'' = L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'} n$$

למה: עקומה $\beta(t)$ המקיימת $\alpha^{k''} + \Gamma_{ij}^{k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} = 0$ היא בהכרח פרמטריזציה במהירות קבועה.

הוכחה: צריך להוכיח שמתקיים $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\beta'\| = 0$. באופן שקול, $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\beta'\|^2 = 0}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\beta'\|^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\beta'(t), \beta'(t)\rangle \overset{\text{Leibniz}}{=} \langle\beta''(t), \beta'(t)\rangle + \langle\beta'(t), \beta''(t)\rangle =$$

$$= 2\langle\beta''(t), \beta'(t)\rangle = 2\left\langle\left(\Gamma_{ij}^{k}\alpha^{i'}\alpha^{j'} + \alpha^{k''}\right)x_k + L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n, x_k\alpha^{k'}\right\rangle =$$

$$= 2\left\langle L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}n, x_k\alpha^{k'}\right\rangle = 2L_{ij}\alpha^{i'}\alpha^{j'}\alpha^{k'}\underbrace{\langle n, x_k\rangle}_{=0}$$

לכן $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\beta'\|^2\right) = 0$.

8.4 קו גאודזי על משטח סיבוב

$$f\left(\varphi\right)>0 \qquad \left(f\left(\varphi\right),g\left(\varphi\right)\right)$$

הסיבוב של f סביב ציר הz הוא:

$$x\left(\theta,\varphi\right)=\left(f\left(\varphi\right)\cos\theta,f\left(\varphi\right)\sin\theta,g\left(\varphi\right)\right)$$

$$\boxed{\Gamma'_{12}=\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}}{f} \qquad \Gamma'_{11}=\Gamma'_{22}=0}$$

$$\alpha^{k''}+\Gamma_{ij}^{k}\alpha^{i'}\alpha^{j'}=0$$

$$k=0$$

$$\alpha^{1''}+\Gamma_{ij}^{1}\alpha^{i'}\alpha^{j'}=0$$

$$\alpha^{1''}+2\Gamma_{12}^{1}\alpha^{1'}\alpha^{2'}=0$$

$$\alpha^{1}=\theta \qquad \alpha^{2}=\varphi$$

$$\boxed{\theta''+2\Gamma'_{12}\theta'\varphi'=0}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+2\Gamma'_{12}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+2\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}}{f}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+\frac{2}{f}\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+\frac{2}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$f\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$f^{2}\frac{\mathrm{d}^{2}\theta}{\mathrm{d}t^{2}}+2f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\left(f^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)'=0$$

$$\boxed{f^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{Const}}$$

קיבלנו ש $\boxed{f^2\left(\varphi\left(t\right)\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{const}}$ לאורך קו גאודזי $\beta\left(t\right)$.

למה

זוית γ בין עקומה β לבין קו רוחב מקיימת

$$\cos\gamma=r\theta'$$

כאשר r הוא מרחק לציר z.

הוכחה

$$\cos\gamma=\left\langle\frac{\beta'}{\|\beta'\|},\frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle$$

נניח $\beta\left(t\right)$ במהירות יחידה: $\|\beta'\|=1$

$$\cos\gamma=\left\langle\beta',\frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle=\frac{1}{\|x_1\|}\left\langle\beta',x_1\right\rangle=\frac{1}{\left(g_{11}\right)^{1/2}}\left\langle\beta',x_1\right\rangle=\frac{1}{r}\left\langle\beta',x_1\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{r}\left\langle\beta',x_1\right\rangle=\frac{1}{r}\left\langle x_i\alpha^{i'},x_1\right\rangle=\frac{1}{r}\left\langle x_1\alpha^{1'},x_1\right\rangle=\frac{\alpha^{1'}}{r}g_{11}=\frac{\alpha^{1'}}{r}\cdot r^2=r\alpha^{1'}=r\theta'$$

$$\boxed{\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}f^2 & 0\\ 0 & \end{pmatrix}1}\qquad f=r$$

$$f^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{Const}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\mathrm{Const}$$

אבל $r\theta'=\cos\gamma$

$$r\left(r\theta'\right)=\mathrm{Const}$$

$$\boxed{r\cos\gamma=\mathrm{Const}}$$

זה נקרא "יחס של Clairaut".

לאורך קו גאוזדי $\beta(t)$ מתקיים $f^2(\varphi(t))\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Const}$

8.5 קואורדינטות פולריות וספיריות

השטח של D הוא אינטגרל כפול:

$$\mathrm{area}(D) = \iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

הסיבה לכך שבקואורדינטות פולריות יש r בתוך המעגל היא ששטח הוא אינטגרל של אורך, וככל שמרחקים מהראשית, אורך המעגל גדל.

קואורדינטות ספריות

$$\theta, \varphi, \rho$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\varphi = \arccos\frac{z}{p} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$\rho > 0$$

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_D \rho^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

הפעם יש $\rho^2\sin\varphi$ בתוך האינטגרל, שכן זה שטח הפנים גדל ככל שמתרחקים מהראשית.

הגדרה

שטח של משטח M עם פרמטריזציה $x\left(u^1, u^2\right)$ כאשר $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$ (עם $U \subseteq \mathbb{R}^2$) הוא מתקבל ע"י אינטגרציה ביחס לאלמנט שטח:

$$\sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\mathrm{d}u^1 du^2$$

דוגמה

על S^2: $\underline{x}\left(\theta,\varphi\right)$

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{bmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

לכן

$$\det\left(g_{ij}\right)=\sin^2\varphi$$

$$\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}=\sin u^2\geq 0$$

לכן

$$\text{area}\left(D\right)=\iint_D\sin u^2\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2$$