תזכורת

משפט 5: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^{*}$ אינטגרבילית. עבור $x\in[a,b]$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}m$.
אזי $F'(x)$ קיימת כב"מ וכב"מ $F'(x)=f(x)$.

הוכחה: **מקרה 1:** נניח שf חסומה. ז.א. קיים $M>0$ כך שלכל $x\in[a,b]$ $|f(x)|\leq M$, ונמשיך f מחוץ ל$[a,b]$ ע"י $f(x)=0$ לכל $x>b$(וממילא $F(x)=F(b)$ לכל $x>b$). כעת לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in[a,b]$ נגדיר $F_n(x)=\frac{F(x+{}^{1}/_{n})-F(x)}{{}^{1}/_{n}}$. לפי מסקנה 2 למשפט 1 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F'(x)$ כב"מ ב$[a,b)$.
נשים לב שלכל $x\in[a,b]$

$$F_n(x)=n\left[\int_a^{x+{}^{1}/_{n}}f\,\mathrm{d}m-\int_a^x f\,\mathrm{d}m\right]=n\int_x^{x+{}^{1}/_{n}}f\,\mathrm{d}m$$

נובע:

$$|F_n(x)|=n\left|\int_x^{x+{}^{1}/_{n}}f\,\mathrm{d}m\right|\leq n\int_x^{x+{}^{1}/_{n}}|f|\,\mathrm{d}m\leq n\int_x^{1+{}^{1}/_{n}}M\,\mathrm{d}m=n\cdot M\cdot\frac{1}{n}=M$$

כיוון שכל הF_n חסומות במידה אחידה ומדובר בקטע סופי $[a,b]$, משפט ההתכנסות החסומה אומר שלכל $c\in[a,b]$

$$\int_a^c F'\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_a^c F_n\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_a^c f\left(x+{}^{1}/_{n}\right)\,\mathrm{d}m-\int_a^c F(x)\,\mathrm{d}m\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_{a+{}^{1}/_{n}}^{c+{}^{1}/_{n}}F\,\mathrm{d}m-\int_a^c F\,\mathrm{d}m\right]=\lim_{n\to\infty}n\int_c^{c+{}^{1}/_{n}}F\,\mathrm{d}m-n\int_a^{a+{}^{1}/_{n}}F\,\mathrm{d}m=$$

וזה שווה $F(c)-F(a)$ כי $F(x)$ רציפה! וכל זה שווה $\int_a^c f\,\mathrm{d}m$(לפי ההגדרה של F).
בסיכום, לכל $c\in[a,b]$ $\int_a^c f\,\mathrm{d}m=\int_a^c F'\,\mathrm{d}m$. לפי המסקנה למשפט 4 $F'(x)=f(x)$ כב"מ ב$[a,b]$.

המשך ההוכחה

מקרה 2: $f(x)\geq 0$ ואינטגרבילית(אבל לאו דווקא חסומה). לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $f_n(x)=\min(f(x),n)=\begin{cases}f(x) & f(x)\leq n\\ n & f(x)>n\end{cases}$, ונגדיר $0\leq g_n(x)=f(x)-f_n(x)$.
עוד נגדיר

$$F_n(x)=\int_a^x f_n\,\mathrm{d}m\qquad G_n(x)=\int_a^x g_n\,\mathrm{d}m$$

כיוון שלכל n $f=f_n+g_n$, לכל $x\in[a,b]$

$$F(x)=F_n(x)+G_n(x)$$

$$\int_a^x f\,\mathrm{d}m = \int_a^x f_n\,\mathrm{d}m + \int_a^x g_n\,\mathrm{d}m$$

נעיר שכיוון ש$g_n(x) \geq 0$, $G_n(x)$ עולה, ולפי משפט 1 $G_n'(x)$ קיימת ולא שלילית כב"מ. לכן כב"מ

$$F'(x) = F_n'(x) + G_n'(x)$$

לפי מקרה 1 $F_n'(x) = f_n(x)$ כב"מ, ולכן כב"מ

$$F'(x) = f_n(x) + G_n'(x) \geq f_n(x)$$

הדבר נכון לכל n ולכן כב"מ

$$F'(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

כעת לכל $c \in [a,b]$

$$\int_a^c F'\,\mathrm{d}m \geq \int_a^c f\,\mathrm{d}m = F(c) - F(a)$$

לפי הגדרה, כי $F(a) = \int_a^a f = 0$. אבל נתון ש$f(x) \geq 0$ ולכן $F(x)$ עולה ב$[a,b]$ ולפי משפט 1

$$\int_a^c F'\,\mathrm{d}m \leq F(c) - F(a)$$

ונוכל להסיק שלכל $c \in [a,b]$

$$\int_a^c F'\,\mathrm{d}m = F(x) - F(a) = \int_a^c f\,\mathrm{d}m$$

לפי המסקנה למשפט 4, $F' = f$ כב"מ ב$[a,b]$.

מקרה 3: לפי מקרה 2 כב"מ $\begin{matrix} G' = f^+ \\ H' = f^- \end{matrix}$ כי $0 \leq f^+, f^-$, אבל $F = G - H$ ולכן כב"מ

$$F' = G' - H' = f^+ - f^- = f$$

$\blacksquare$

נסכם את המשפטים הקודמים במשפט 6:

משפט 6(הכללת לבג למשפט היסודי של החשבון האינטגרלי חלק א')

תהי $f : [a,b]$ אינטגרבילית, ונגדיר לכל $x \in [a,b]$ $F(x) = \int_a^x f \,\mathrm{d}m$. אזי F רציפה בהחלט ב$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)$ קיימת ושווה $f(x)$.

כעת, נפתח כלי להוכיח את הכללת לבג לחצי השני של המשפט היסודי. הוא הוכיח שאם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז f' קיימת כב"מ ואינטגרבילית, ומתקיים

$$\int_a^b f' \,\mathrm{d}m = f(b) - f(a)$$

הערה: אי אפשר לשפר תוצאה זו כי אם נתון שלכל $c \in [a,b]$ $\int_a^c f' \,\mathrm{d}m = f(c) - f(a)$ אז בעצם $f(c)$ אינטגרל לא מסויים, שהיא רציפה בהחלט לפי משפט 6.

תחילה נראה שאם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה בהחלט $f'(x)$ קיימת כב"מ ב$[a,b]$. לצורך זה נשתמש במושג של השתנות חסומה.

אינטואטיבית, ההשתנות של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ היא סכום כל השינויים שלה בערך מוחלט.

לדוגמה: $f(x) = \sin x$ בקטע $[0, 2\pi]$.

- בקטע $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ f עלתה 1
- בקטע $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ f ירדה 2
- בקטע $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ f עלתה 1

לכן ההשתנות שלה ב$[0, 2\pi]$ שווה $1 + 2 + 1 = 4$

הגדרה פורמלית

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה P של $[a,b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

ונגדיר את ההשתנות של f בP ע"י

$$\bigvee (f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

ההשתנות הכוללת של f ב$[a,b]$ מוגדרת ע"י $T_a^b(f) = \sup_P \bigvee (f, P)$, ואם $T_a^b(f) < \infty$ אומרים שf בעלת השתנות חסומה ב$[a,b]$.

משפט 7

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה $\iff$ $f = g - h$ כאשר g וh עולות ב$[a,b]$.

למה

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

אזי

$$T_a^b\left(f\right)<\infty$$

הוכחה

נבחר $\varepsilon=1$. אזי לפי הגדרת רציפות בהחלט קיים $\delta>0$ כך שאם $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$ הם קטעים זרים בזוגות בתוך $[a,b]$ כך ש$\sum\limits_{k=1}^n b_k-a_k<\delta$ מתקיים $\varepsilon>\sum\limits_{k=1}^n\left|f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right|$.

כעת ניקח תת קטע $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ כך ש$\beta-\alpha<\delta$ עבור חלוקה כלשהי P

$$\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_n=\beta$$

$$\bigvee\left(f,P\right)=\sum_{k=1}^n\left|f\left(x_k\right)-f\left(x_{k-1}\right)\right|<1$$

כי $\sum\limits_{k=1}^n<\delta$. נובע ש

$$T_\alpha^\beta\left(f\right)=\sup_P\bigvee\left(f,P\right)\leq 1$$

כעת $[a,b]$ קטע סופי, ונוכל לעשות חלוקה $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, כך שלכל k $x_k-x_{k-1}<\delta$. לפי הלמה

$$T_a^b\left(F\right)=\sum_{k=1}^m T_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f\right)\leq\sum_{k=1}^m 1=m$$

וזה סופי.

■

מסקנה 1

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז $f'\left(x\right)$ קיימת כב"מ ומדידה.

הוכחה

לפי משפט 8 $T_a^b\left(f\right)<\infty$, לכן לפי משפט 7 $f=g-h$ כאשר g וh עולות. לפי משפט 1 g' וh' קיימות כב"מ ומדידות, לכן $f'=g'-h'$ קיימת כב"מ ומדידה.

מסקנה 2

אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז f' אינטגרבילית לבג ב$[a,b]$.

הוכחה

לפי מסקנה 1, $f=g-h$, g,h עולות, $f'=f'-h'$(כב"מ) וf' מדידה. לכן כב"מ

$$|f'(x)|\le g'(x)+h'(x)$$

לפי משפט 1

$$\int_a^b [g'+h']\,\mathrm{d}m\le g(b)-g(n)+h(b)-h(a)<\infty$$

ונובע ממשפט בפרק קודם שf' אינטגרבילית.

משפט 9

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט, ונניח ש$f'(x)=0$ כב"מ ב$[a,b]$. אזי $f(x)$ קבועה ב$[a,b]$.

הוכחה

ניקח $c\in[a,b]$ כלשהו ונוכיח ש$f(c)=f(a)$. לצורך זה נגדיר $E=\{x\in[a,b]|f'(x)=0\}$. לפי הנתון $m(E)=c-a$.

כעת יהי $\varepsilon>0$ נתון, ונבחר $\delta>0$ מתאים ל$\varepsilon>0$ בהגדרה של רציפות בהחלט של f.

נעיר שלכל $x\in E$ יש מספרים h_n קטנים כרצוננו כך ש$\varepsilon>\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$. אז קטעים כאלה מהסוג $[x,x+h]$(או $[x+h,x]$ אם $h<0$) מהווים כיסוי ויטלי של E.
לפי למת ויטלי נוכל לבחור מספר סופי של קטעים כאלה זרים בזוגות $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^n$ כך ש$\sum_{k=1}^n y_k-x_k>c-a-\delta$ ולכל k $\left|\frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}\right|$ או $|f(y_k)-f(x_k)|<\varepsilon(y_k-x_k)$.
לנוחיות נגדיר $a=y_0;c=x_{n+1}$ ונרשום

$$f(c)-f(a)=f(x_{n+1})-f(y_n)+f(y_n)-f(x_n)+f(x_n)-f(y_{n-1})+\cdots+f(y_1)-f(x_1)+f(x_1)-f(y_0)$$

מכאן

$$|f(c)-f(a)|\le\sum_{k=1}^n|f(y_k)-f(x_k)|+\sum_{k=1}^{n+1}|f(x_k)-f(y_k)|$$

לפי הבנייה שלנו, לכל k

$$|f(y_k)-f(x_k)|<\varepsilon(y_k-x_k)$$

ולכן

$$\sum_{k=1}^n|f(y_k)-f(x_k)|<\varepsilon\sum_{k=1}^n y_k-x_k<\varepsilon(c-a-\delta)$$

כמו כן לפי הבנייה $\sum_{k=1}^{n+1}(x_k - y_{k-1}) < \delta$, ולכן ע"פ רציפות בהחלט

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(y_{k-1})| < \varepsilon$$

מכל זה נסיק ש

$$|f(c) - f(a)| < \varepsilon (c - a - \delta)$$

ε קטן כרצוננו. נוכל להשאיף $\varepsilon \to 0$ להסיק $f(c) = f(a)$.
הדבר נכון לכל $c \in [a, b]$, לכן f קבועה.

■

משפט 10(הכללת לבג למשפט היסודי חלק ב')

תהי $f(x)$ מוגדרת ורציפה בהחלט ב$[a,b]$. אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ב$[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f' \, \mathrm{d}m = f(b) - f(a)$$

הוכחה

לכל $x \in [a,b]$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f' \, \mathrm{d}m$. F מוגדרת היטב ע"י מסקנה למשפט 8 שf' אינטגרבילית. לפי משפט 6 F רציפה בהחלט ומתקיים $F'(x) = f'(x)$ כב"מ.
כעת נגדיר $g(x) = F(x) - f(x)$. כיוון שF וגם f(ע"פ הנתון) רציפות בהחלט, גם g רציפה בהחלט. לפי הנתונים כב"מ

$$g'(x) = F'(x) - f'(x) = 0$$

לכן נובע ממשפט 9 ש$c \equiv g(x)$ ב$[a,b]$. לכן עבור כל $x \in [a,b]$

$$c = g(x) = F(x) - f(x)$$

נובע ש

$$f(b) - f(a) = [F(b) - c] - [F(a) - c] = F(b) - F(a) = \int_a^b f' \, \mathrm{d}m$$

■

כעת נעבור ל"משפט לבג" האומר שפונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ רציפה כב"מ($\mathrm{d}m$), ואם כן f אינטגרבילית לבג ומתקיים

$$\int_{\text{Riemann}} f=\int_{\text{Lebesgue}} f$$

כדי להוכיח משפט זה נחזור בקיצור על הבנייה של אינטגרל רימן מאינפי 2. ובכן: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה, נעשה חלוקה P של $[a,b]$

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

ונבנה

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k\qquad\underline{S}(f,P)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$$

כאשר לכל k

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$$

$$M_k=\sup\{f(x)|x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

$$m_k=\inf\{f(x)|x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

ומגדירים $\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le n}(\Delta x_k)$. עוד מגדירים אינטגרל עליון

$$\overline{\int_a^b} f=\inf_P\overline{S}(f,P)$$

ואינטגרל תחתון

$$\underline{\int_a^b} f=\sup_P\underline{S}(f,P)$$

ואומרים שf אינטגרבילית רימן אם $\underline{\int_a^b}f=\overline{\int_a^b}f$ והערך המשותף הוא $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

משפט דרבו אומר שתמיד

$$\overline{\int_a^b} f=\lim_{\lambda(P)\to 0}\overline{S}(f,P)\qquad\underline{\int_a^b} f=\lim_{\lambda(P)\to 0}\underline{S}(f,P)$$

לכן עבור f כלשהו ניתן לחשב את $\overline{\int}f$ ו$\underline{\int}f$ כגבולות של $\overline{S}(f,P)$ ו$\underline{S}(f,P)$ בהתאמה, כאשר P_n חלוקה שווה של $[a,b]$ ל2^n קטעים. החלוקה הזו נותנת מלבנים שרוחביהם הם הקטעים בחלוקה P_n וגובהם המקסימום/מינימום של הפונקציה בקטע.

לכל n

$$\overline{S}(f,P_n)=\int_a^b\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

כאשר φ_n פונקצית מדרגות המקיימת $f(x) \le \varphi_n(x)$, ונעיר שלφ_n אין הבדל בין אינטגרל רימן לאינטגרל לבג.
כמו כן, לכל n

$$\underline{S}(f, P_n) = \int_a^b \psi_n(x)\, \mathrm{d}x$$

כאשר $\psi_n(x) \le f(x)$ פונקצית מדרגות, ולפי הבנייה

$$\varphi_1(x) \ge \varphi_2(x) \ge \varphi_3(x) \ge \cdots$$

$$\psi_1(x) \le \psi_2(x) \le \psi_3(x) \le \cdots$$

כעת ניקח $x_0 \in [a,b]$ שלא בנקודות החלוקה של אף P_n, ונעיז לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x_0)$.
ובכן: עבור n כלשהו $\varphi_n(x_0)$=החסם העליון של $f(x)$ באיזה קטע $I_{n,k}$ של החלוקה P_n. $|I_{n,k}| = \frac{b-a}{2^n}$. כעת:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in I_{n,k}} f(x) = \max\left(f(x_0), \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right)$$

קוראים לזה $f^U(x_0)$. באותה מידה

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x_0) = \min\left(f(x_0) \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right) = f^L(x)$$

כב"ם

$$\varphi_n \to f^U \qquad \psi_n \to f^L$$

הכל כאן חסום, לכן לפי משפט ההתכנסות החסומה

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, \mathrm{d}m = \int_a^b f^U \, \mathrm{d}m$$

כמו כן

$$\underline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \, \mathrm{d}m = \int_a^b f^L \, \mathrm{d}m$$

לפי הגדרה f אינטגרבילית רימן $\iff$ $\underline{\int} f = \overline{\int} f$, ז.א. $\iff$ $\int_a^b f^U \, \mathrm{d}m =$ $\int_a^b f^L \, \mathrm{d}m$ $\iff$ $\int_a^b \left(f^U - f^L\right) \mathrm{d}m = 0$. אבל לפי הבנייה כב"מ $f^U - f^L \ge 0$, לכן ע"פ משפט מהפרק הקודם f אינטגרבילית רימן $\iff$ $f^U = F^L$ כב"מ. ז.א. לכמעט כל $x_0 \in [a,b]$

$$\max\left(f(x_0), \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right) = \min\left(f(x_0), \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)\right)$$

ז.א. כב"מ

$$\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = f(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x)$$

$\Longleftrightarrow$ f רציפה כב"מ ב$[a,b]$.

כעת, נניח שאמנם f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ולכן כב"מ f רציפה כב"מ ומתקיים כב"מ $f(x) = f^U(X) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$, לכן

$$\int_{\text{Lebesgue}} f\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{\text{Lebesgue}} \varphi_n\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_{\text{Riemann}} \varphi_n\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, P_n) = \underset{\text{Riemann}}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ובזה הוכחנו את כל משפט לבג.