מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' נתן נתניהו
תאריך: 2019-01-16

עיבוד תמונות
89-560-01

הערות:

- ישירות מההגדרה נובע שDFT מחזורית. כלומר עבור תמונה בגודל $N \times N$ מתקיים:

$$F\left(u,v\right)=F\left(u+N,v\right)=F\left(u,v+N\right)=F\left(u+N,v+N\right)$$

- אמנם F חוזרת על עצמה באופן אינסופי, אבל דרוש רק מחזור אחד (חלון בגודל $N \times N$) כדי לקבל את $f\left(x,y\right)$.
- במידה ו$f\left(x,y\right)$ ממשי, מתקיים:

$$F\left(u,v\right)=F^{*}\left(-u,-v\right)$$

(F^{*} = צמוד קומפלקסי)

$$\left|F\left(u,v\right)\right|=\left|F\left(-u,-v\right)\right|$$

- כדי לקבל את תמונת הספקטרום הרצויה בין 0 ל$N-1$ יש לבצע הזזה בשיעור $\frac{N}{2}$ (במישור התדר):

$$f\left(x\right)e^{i\frac{2\pi}{N}u_{0}x}\iff F\left(u-u_{0}\right)$$

נציב $u_{0}=\frac{N}{2}$ ונקבל:

$$e^{i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}x}=e^{i\pi x}=\left(-1\right)^{x}$$

מסקנה: ניתן להכפיל תחילה את $f\left(x\right)$ ב$\left(-1\right)^{x}$ ורק אז לבצע את ההתמרה. במקום לעשות fftshift.

  - במקרה הדו־מימדי - כדי להעתיק את הספקטרום הדיסקרטי $F\left(u,v\right)$ ל$\left(\frac{N}{2},\frac{N}{2}\right)$, יש להכפיל את $f\left(x,y\right)$ ב$\left(-1\right)^{x+y}$.

התמרת פוריה המהירה Fast Fourier Transform

עדיין מדברים על DFT. נתמקד במקרה החד־מימדי:

$$F\left(u\right)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f\left(x\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}ux}\qquad u=0,1,\ldots N-1$$

האלגוריתם הנאיבי (brute force) ירוץ בסיבוכיות $O\left(N^{2}\right)$. ננסה לשפר את זמן הריצה באמצעות שיטת הפרד ומשול.

שיטת Colley and Tukey (1965)

עובדים בנפרד על הדגימות ה"זוגיות" והדגימות ה"אי־זוגיות". כלומר - נפרק את $F\left(u\right)$ בצורה הבאה:

$$F\left(u\right)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1}f\left(2x\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}u(2x)}+\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{\frac{N}{2}-1}f\left(2x+1\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}u(2x+1)}$$

ממשיכים לפתח באופן רקורסיבי, עד שבעלים התמרת פוריה של ערך בודד היא הוא עצמו, ואז מחברים באמצעות:

$$F\left(u\right)=\frac{1}{2}\left(F_{\text{even}}^{\frac{N}{2}}\left(u\right)+F_{\text{odd}}^{\frac{N}{2}}\left(u\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}u}\right)$$

$$f\left(u+\frac{N}{2}\right)=F_{\text{even}}^{\frac{N}{2}}\left(u\right)-F_{\text{odd}}^{\frac{N}{2}}\left(u\right)e^{-i\frac{2\pi}{N}u}$$

עבור $u=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$

עבור סיגנל חד־מימדי הסיבוכיות של זה היא $O\left(n\log n\right)$, וכאשר מבצעים על תמונה מגודל $N\times N$ צריך $O\left(N^{2}\log N\right)$ פעולות.

הנוסחה עבור המקרה הדו־מימדי

$$F\left(u,v\right)=\frac{1}{N^{2}}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{x=0}^{N-1}f\left(x,y\right)K\left(x,u,y,v\right)$$

כאשר

$$K\left(x,u,y,v\right)=e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(xu+yv\right)}$$

ואפשר לפרק אותו לשני קרנלים:

$$K_{1}\left(x,u\right)=e^{-i\frac{2\pi}{N}xu}\qquad K_{2}\left(y,v\right)=e^{-i\frac{2\pi}{N}yv}$$

ואז:

$$F\left(u,v\right)=\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}\left\{ \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f\left(x,y\right)K_{1}\left(x,u\right)\right\} K_{2}\left(y,v\right)$$

כלומר עבור כל עמודה בודדת y יש לנו את $\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}f\left(x,y\right)K_{1}\left(x,u\right)$ - התמרת פורייה חד־מימדית. יש לנו N התמרות חד־מימדיות כאלה - סה"כ יעלה לנו $O\left(N\log N\right)$ לחשב כל עמודה, ואת כל העמודות $O\left(N^{2}\log N\right)$.
אחרי שעושים את זה אפשר לחשב את התמרות הפוריה של כל שורה (לפי התוצאות של ההתמרות מהעמודות) - גם זה עולה $O\left(N^{2}\log N\right)$, וסה"כ עלות החישוב היא $O\left(N^{2}\log N\right)$.

Low Pass Filter עם פרופיל של פונקציית מדרגה

יש תמונה מקורית $f\left(x,y\right)$, ועושים לו עיבוד במישור התדר $G\left(u,v\right)=F\left(u,v\right)\cdot H\left(u,v\right)$:

$$H\left(u,v\right)=\begin{cases} 1 & D\left(u,v\right)\leq D_{0}\\ 0 & D\left(u,v\right)>D_{0} \end{cases}$$

כאשר $D\left(u,v\right)=\sqrt{u^{2}+v^{2}}$ זה הרדיוס של $\left(u,v\right)$ מהמרכז וD_{0} זה רדיוס המעגל. בעצם איפסנו את כל התדרים הגבוהים מD_{0}.

נשים ♡: מצד אחד התדרים הגבוהים מזוהים עם רעש (שינוי מהיר), ומצד שני הם גם מזוהים עם פרטים אמיתיים בתמונה (שפות)

LPF עם Butterworth

לא בטוח שפרופיל מדרגה זה מה שאנחנו רוצים - אולי עדיף משהו פחות חד:

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{D(u,v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

נשים לב:

- כאשר $D(u,v)=D_0$ הערך הוא $\frac{1}{2}$.
- כאשר $D(u,v)=0$, $H(u,v)=\frac{1}{1+0^{2n}}=1$
- כאשר $D(u,v)\to\infty$, $H(u,v)\to\frac{1}{1+\infty^{2n}}\to 0$
- עבור nים שונים מקבלים עקומות שונות.

ומה במקרה של High Pass Filter?

כמו קודם, רק הפוך. עבור מדרגה:

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & D(u,v)\le D_0\\ 1 & D(u,v)>D_0\end{cases}$$

ועבור Butterworth:

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{D_0}{D(u,v)}\right)^{2n}}$$

Band Pass Filtering

כאשר אנחנו מעוניינים להעביר תחום מסויים של תדרים, כדי להתמקד בתופעות מסויימות שמעניינות אותנו:

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & D(u,v)\le D_0-\frac{w}{2}\\ 1 & D_0-\frac{w}{2}\le D(u,v)<D_0+\frac{w}{2}\\ 0 & D(u,v)>D_0+\frac{w}{2}\end{cases}$$

High Frequency Enphasis

כאשר רוצים להדגיש את השפות:

$$H'(u,v)=K_0+H(u,v)$$

כאשר בד"כ $K_0=1$.
כאן לא נוגעים בתדרים הנמוכים, ופשוט מגדילים את התדרים הגבוהים.