תרגיל 6 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. יהי E שדה פיצול של $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ כך ש $[E:\mathbb{Q}]$ אי זוגי. הוכיחו כי ל $f(x)$ יש שורש ממשי.
פתרון: יהי a שורש של $f(x)$. אנחנו יודעים ש

$$[E:\mathbb{Q}] = [E:\mathbb{Q}(a)][\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$$

ולכן $[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]$ אי זוגי. ולכן הפולינום המינימלי של a m_aהוא פולינום מדרגה אי זוגית מעל $\mathbb{Q}$ ולפולינומים כאלה חייב להיות שורש ממשי. בנוסף

$$m_a \mid f$$

כי הפולינום המינימלי של a מחלק כל פולינום שמאפס את a. לכן השורש הממשי של m_a הוא גם שורש ממשי של $f(x)$.

2. יהיו $g, h \in F[x]$ שני פולינומים אי פריקים, מתוקנים שונים וספרבילים. הוכיחו כי מכפלתם gh גם ספרבילית.
פתרון: נניח שלא. אז יש במכפלה גורם כפול $x-a$. היות ש g, h ספרביליים $x-a$ הוא גורם של שניהם. כלומר a שורש של שניהם. כלומר שניהם פולינומים מינימליים של a ולכן שווים בסתירה.

3. תהי $F \subseteq K$ הרחבה סופית של שדות ממאפיין p כך ש $\gcd([K:F], p) = 1$. הוכיחו כי ההרחבה ספרבילית.
פתרון: יהי $a \in K$ עם פולינום מינימלי f. הדרגה של f מחלקת את $[K:F]$ ולכן מתקיים

$$\gcd(\deg f, p) = 1$$

ולכן אין סיכוי ש $g' = 0$ (המקדם המוביל לא מתאפס) כלומר g ספרבילית.