מבנים אלגבריים - תירגול 10

5 בינואר 2016

הגדרה : $(R,+,\cdot)$ יקרא חוג אם:

1. הזוג$(R,+)$ מהווה חבורה חילופית.
2. הכפל מוגדר וקיבוצי.
3. מתקיים פילוג $a(b+c)=ab+ac,\ (a+b)c=ac+bc$

למשל $\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n$ הם חוגים ביחס לחיבור וכפל הסטנדרטים.
הערה: לכל $a\in R$ מתקיים כי $0a=0$. הוכחה : $0a=(0+0)a=0a+0a$ וחיבור $-0a$ לשני האגפים.
חוגים מיוחדים:

1. חוג חילופי - אם הכפל הוא חילופי $ab=ba$ למשל החוג $\mathbb{Z}$.
   חוג המטריצות $\mathbb{R}^{n\times n}$ אינו חילופי.
2. חוג עם יחידה - קיים איבר ניטרלי בכפל 1 כלומר $a\cdot 1=1\cdot a=a$ למשל $\mathbb{Z}$.
   הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$מהווה חוג ביחס לחיבור וכפל מטריצות ואין בו יחידה.
3. חוג עם חילוק - חוג עם יחידה שלכל איבר שונה מאפס יש הופכי ביחס לכפל, כלומר לכל $a\neq 0$ קיים a^{-1} המקיים $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. החוג $\mathbb{Q}$ הוא חוג עם חילוק.
   החוג $\mathbb{Z}$ אינו חוג עם חילוק.
4. שדה - חוג עם חילוק חילופי. החוג $\mathbb{R}$ הוא שדה.
   החוג $\mathbb{Z}$ אינו חוג עם חילוק.

דוגמא נוספת:
אם R חוג חילופי אזי חוג הפולינומים $R[x]$ הינו חוג חילופי.
למשל $\mathbb{Z}_4[x]$.
תרגיל: הוכח כי $\mathbb{Z}_4[x]$ אינו חוג עם חילוק. והראה כי $1+2x$ איבר הפיך
פתרון. מתקיים

$$(1+2x)(1-2x)=1-4x^2=1$$

בנוסף, 2 אינו הפיך כי נניח בשלילה שכן $2a=1$ נכפיל את שני האגפים ב 2 ונקבל $0=4a=2$ סתירה.
תרגיל: יהא R חוג המקיים $x^2=x$ לכל $x\in R$. הוכח כי Rחילופי

פתרון: יהיו a, b.

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$$

נצמצם ונקבל $ab = -ba$ כעת

$$ab = (ab)^2 = (-ba)^2 = (ba)^2 = ba$$

כאשר המעבר $(-ba)^2 = (ba)^2$ נשאר לש.ב.