בוחן בדידה

2.12.2014 , י' כסליו תשע"ה

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- **כיתבו כל תשובה בדף של השאלה. על כל דף רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

מבנה הבחינה:
שאלה 1 - שש שאלות נכון/לא נכון. 5 נקודות לכל שאלה (סה"כ $5 \times 6 = 30$ נקודות)
שאלה 2+3 - שאלות פתוחות. כל שאלה 35 נקודות.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. קבע "נכון" או "לא נכון" (ללא נימוק)

(א) עבור כל שני פסוקים p, r מתקיימת השקילות הלוגית הבאה

$$\neg (p \to r) \equiv p \to (\neg r)$$

נכון / לא נכון
פתרון: לא נכון. עבור $p = 0, r = 1$ נקבל בצד שמאל F ובצד ימין T

(ב) עבור כל שני פסוקים p, r מתקיימת השקילות הלוגית הבאה

$$p \to r \equiv (\neg r) \to (\neg p)$$

נכון / לא נכון
פתרון: נכון.

(ג) עבור כל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים

$$(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

נכון / לא נכון
פתרון: לא נכון. למשל $A = B = \{1\}, C = D = \{2\}$ אזי
$(2,1) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ אבל $(2,1) \notin (A \times B) \cup (C \times D)$

(ד) עבור כל קבוצה U וכל 2 תתי קבוצות שלה $A, B \subseteq U$ מתקיים כי

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

נכון / לא נכון
פתרון: נכון.

(ה) עבור כל 2 קבוצות A, B מתקיים

$$A \cup (B \backslash A) = B$$

נכון / לא נכון
פתרון: לא נכון. למשל $A = \{1\}, B = \emptyset$

(ו) עבור כל קבוצה A מתקיים

$$A \subseteq P(A) \Rightarrow A \cap P(A) \neq \emptyset$$

נכון / לא נכון
פתרון: לא נכון. עבור $A = \emptyset$ מתקיים כי $A \subseteq P(A)$ אבל $A \cap P(A) = \emptyset$

2. הוכח (באינדוקציה, או בכל דרך אחרת) כי לכל n טבעי **אי זוגי** מתקיים כי

$$24 \mid \left(n^3 - 25n\right)$$

(במילים: 24 מחלק את $n^3 - 25n$ ללא שארית).
פתרון: הטענה מתייחסת לכל מספר א"ז כלומר על כל המספרים

מהצורה $n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}$. נעשה אינדוקציה על k.

עבור $k = 1$ נקבל כי $n = 1$ ומתקיים $24 \mid 1^3 - 25$

כעת נניח כי הטענה נכונה עבור k מסוים.

כלומר מתקיים $24 \mid \left((2k-1)^3 - 25(2k-1)\right)$.

צ"ל להוכיח את הטענה עבור $k+1$ (שזה אומר $n = 2k+1$) כלומר שמתקיים
$24 \mid \left((2k+1)^3 - 25(2k+1)\right)$

נעשה חישוב מקדים

$$(2k+1)^3 - 25(2k+1) = (2k-1+2)^3 - 25(2k-1+2)$$

$$= (2k-1)^3 + 3(2k-1)^2 2 + 3(2k-1)2^2 + 8 - 25(2k-1) - 50$$

הנחת האינדוקציה היא כי $(2k-1)^3 - 25(2k-1)$ מתחלק ב־24

ולכן מספיק להוכיח כי $3(2k-1)^2 2 + 3(2k-1)2^2 + 8 - 50$ מתחלק ב 24.

$$3(2k-1)^2 2 + 3(2k-1)2^2 - 42 = 6(4k^2 - 4k + 1) + 12(2k-1) - 42 = 24k^2 - 48$$

שאכן מתחלק ב 24.

3. תהא X קבוצה. תהא $A \subseteq X$ תת קבוצה שלה בעלת n איברים. נגדיר יחס $\equiv$ על $P(X)$ כך

$$\forall B_1, B_2 \in P(X): \ B_1 \equiv B_2 \iff B_1 \cap A = B_2 \cap A$$

(א) הוכח כי $\equiv$ הוא יחס שקילות.

(ב) מה גודל קבוצת המנה ${}^{P(X)}/_{\equiv}$.

פתרון:

(א)

i. רפלקסיבי: לכל $B \in P(X)$ מתקיים כי $B \cap A = B \cap A$ ולכן $B \equiv B$

ii. סימטרי: נניח $B_1 \equiv B_2$ אזי $B_1 \cap A = B_2 \cap A$ ולכן גם $B_2 \cap A = B_1 \cap A$ שזה אומר $B_2 \equiv B_1$

iii. טרנזיטיבי: נניח $B_1 \equiv B_2, \ B_2 \equiv B_3$ אזי $B_1 \cap A = B_2 \cap A, \ B_2 \cap A = B_3 \cap A$.
מחיבור שני הנתונים נקבל כי $B_1 \cap A = B_3 \cap A$ ולכן $B_1 \equiv B_3$

(ב) תהא $[B]$מחלקת שקילות. נציג סטנדרטי של מחלקת שקילות זו היא $A \cap B$ שזוהי קבוצה ב $P(A)$. מאידך גיסא כל קבוצה ב $P(A)$ היא נציג של מחלקת שקילות. בנוסף עבור $B_1 \neq B_2 \in P(A)$ נקבל שהמחלקות שקילות שלהם שונות כי $B_1 = A \cap B_1 \neq A \cap B_2 = B_2$ ולכן הגודל של ${}^{P(X)}/_{\equiv}$ שווה לגודל של $P(A)$. הגודלה היא 2^n