פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 8

1. $f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2}$. נפתח את $\frac{1}{z^2}$ בלבד.

א. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $|z-2|>2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{2}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n (z-2)^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n (z-2)^{-n-1}.$$

נגזור לקבל $-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}-(n+1)(-2)^n(z-2)^{-n-2}$. מכאן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2)^n(z-2)^{-n-3}$

ב. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת $0<|z-2|<2$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-2+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n$$

נגזור לקבל $-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}$. מכאן $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}(z-2)^{n-2}$.

2.

א. $g(z)=z^3e^{-1/z^2}=z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n+3}$.

ב. השארית מתקבלת כאשר $n=2$, והיא $\frac{1}{2}$.

.3

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$$

נשים לב שבסביבת $3i$ הפונקציה

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}$$

היא אנליטית ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3i)^n$$

ולכן

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3i)^{n-2}$$

כלומר החלק העיקרי הוא

$$a_0(z-3i)^{-2} + a_1(z-3i)^{-1}$$

אבל כידוע,

$$a_0 = g(3i) \quad a_1 = g'(3i)$$

כלומר

$$a_0 = \frac{3ie^{-3}}{(6i)^2} = \frac{3i}{e^3(-36)} = -\frac{i}{12e^3}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{(e^{iz} + ize^{iz})(z+3i)^2 - 2(z+3i)(ze^{iz})}{(z+3i)^4} \\ &= e^{iz}\frac{(1+iz)(z+3i) - 2z}{(z+3i)^3} \end{aligned}$$

ולכן

$$g'(3i) = \frac{1}{e^3}\frac{(-2)(6i) - 6i}{(6i)^3} = \frac{1}{e^3}\frac{-3}{-36} = \frac{1}{12e^3}$$

כלומר החלק העיקרי הוא:

$$-\frac{i}{12e^3}(z-3i)^{-2} + \frac{1}{12e^3}(z-3i)^{-1}$$

4. א. כן זה ייתכן ל $f(z)=z$ יש רק חזקות חיוביות ול $\frac{1}{z}$ יש רק חזקות שליליות.
ב. זה לא ייתכן. אם ל $f(z)$ יש רק חזקות חיוביות אז היא אנליטית או שהסינגולריות שלה ב 0 סליקה ואז

$$\lim_{z\to 0} f(z)$$

הוא מספר. ואז

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)}$$

קיים במובן הרחב (מספר או אינסוף) וזה אומר ש $z=0$ אינה סינגולריות עיקרית אז בטור לורן אין אינסוף חזקות שליליות.

5. לפי הנתונים

$$f(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} \quad g(x)=(z-z_0)^3\tilde{g}(z)$$

$$r(z)=(z-z_0)^2\tilde{r}(z) \quad h(z)=(z-z_0)\tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב z_0.
א.

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}=\frac{(z-z_0)\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)}=\frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב z_0 ולכן z_0 סינגולריות סליקה.
ב.

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}=\frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2}+(z-z_0)^3\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z)+(z-z_0)\tilde{h}(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^3}\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$$

הפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$ אנליטית ב z_0 ולכן z_0 היא קוטב מסדר 3.