

## תרגיל 2

13 במרץ 2018

### שאלה 1

דרגו את המטריצות הבאות לצורה מדורגת קנונית:  
(1)

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 12 & 13 & 5 & 5 & 34 \\ 11 & 11 & 5 & 5 & 30 \\ 11 & 11 & 3 & 5 & 28 \\ 24 & 25 & 9 & 10 & 66 \end{pmatrix}$$

### פתרון:

לאחר דירוג ארוך ומתיש מקבלים את המטריצה בצורה מדורגת

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{22}{7} \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{2}{7} & \frac{12}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

נמשיך לדרג לצורה הקנונית ונקבל את מטריצת היחידה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & (1-2i) & (5+i) & 3i \end{pmatrix}$$

תזכורת:  $i = \sqrt{-1}$

### פתרון:

$$\begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 1-2i & 5+i & 3i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & i & 5i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11i & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**שאלה 2**

פתרו את המערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 4x + z = 3 \\ x - \frac{1}{2}y + 6z = 6 \end{cases}$$

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 12 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 13 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{21}{40} \\ -\frac{3}{20} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} \text{ ולכן הפתרון של המערכת הוא}$$

**שאלה 3**

פתרו את המערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - w = 0 \\ 2x - 4y + 4z - 2w = 0 \\ x - 2y + 5z - w = 5 \\ 2x - 4y + 6z - 2w = 6 \end{cases}$$

**פתרון:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y + w \\ y \\ 1 \\ w \end{pmatrix}$$

$y, w$  הם משתנים חופשיים ולכן הפתרון הוא

#### תרגיל 4

עבור אילו ערכי  $c \in \mathbb{R}$  למערכת הבאה יש פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון?

$$\begin{cases} 3x + y + cz = 0 \\ 6x + cy + (2c + 1)z = 1 \\ 9x + 3y + (c^2 + 3)z = c - 1 \end{cases}$$

#### פתרון:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & c & 0 \\ 6 & c & 2c+1 & 1 \\ 9 & 3 & c^2+3 & c-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (c-1)(c-2) & c-1 \end{pmatrix}$$

יש לבדוק את המקרים  $c = 1, 2$

אם  $c \neq 1, 2$  אז אין אף שורת אפסים ובכל עמודה יש ציר ולכן יהיה פתרון יחיד

אם  $c = 1$  המטריצה נראית כך:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אין פה שורת סתירה ויש משתנה חופשי  $z$  ולכן יש אינסוף פתרונות

אם  $c = 2$  המטריצה נראית כך:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

בשורה באחרונה יש שורת סתירה ולכן אין פתרון במקרה הזה.

#### תרגיל 5

עבור אילו ערכי  $c \in \mathbb{R}$  למערכת הבאה יש פתרון יחיד/אינסוף פתרונות/אין פתרון?

$$\begin{cases} x + y + cz = 5 \\ 2x + 4y + 6z = 6 \end{cases}$$

#### פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & c & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & c & 5 \\ 0 & 2 & 6-2c & -4 \end{pmatrix}$$

אין שורת סתירה וללא תלות בערך של  $c$  יש משתנה חופשי  $z$  ולכן לכל ערך של  $c$  יש אינסוף פתרונות.