20. אם אשלם לחייט, לא יישאר ברשותי שום כסף. אוכל ללכת עם נערתי לרקוד רק אם יהיה לי כסף. היא תהיה אומללה אם לא אלך עימה לרקוד. אילם אם לא אשלם לחייט, הוא לא ימסור לי את חליפתי; ובלעדי החליפה ודאי שאינני יכול ללכת עם נערתי לרקוד. אני חייב או לשלם לחייט או לא לשלם לו. כך שמן ההכרח שנערתי תהיה אומללה! (H ,V ,R ,K ,S)

II. הוכחה לאי־תקפות

מובן כי ארגומנט לא־תקף אין הוכחה צורנית לתקפותו. אולם אם נכשלים מאמצינו לגלות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט נתון, אין בישלון זה מוכיח שהארגומנט איננו תקף, ושאין שום אפשרות לבנות הוכחה כזאת. אפשר שמשמעותו היחידה של הכישלון היא שלא ניסינו די. הסיבה לאי־יכולתנו למצוא הוכחה לתקפות עלולה להיות העובדה שהארגומנט איננו תקף, אך היא יכולה גם להיות חוסר התושייה שלנו עצמנו — וזאת כתוצאה מאופיו הלא־יעיל של תהליך בניית ההוכחה. אי־היכולת לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט איננה מוכיחה שהארגומנט לא־תקף. מה איפוא משמש כהוכחה שארגומנט נתון איננו תקף?

הדרך שתתואר כאן קשורה באופן הדוק לדרך לוחות האמת, אם כי היא קצרה ממנה בהרבה. יהיה לנו לעזר להיזכר כיצד בעזרת לוח אמת מוכיחים אי־תקפותו של דפוס טיעון לא־תקף. אם אפשר למצוא מקרה אחד ויחיד (שורה) שבו ערכי האמת נקבעים למישתנים הפסוקיים באופן כזה שההקדמות נעשות אמיתיות והמסקנה שקרית — הרי שדפוס הטיעון איננו תקף. אם נוכל איך שהוא לקבוע ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות ארגומנט, אשר יעשו את הקדמותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית, הרי שקביעה זו תספיק כדי להוכיח אי־תקפותו של הארגומנט. קביעה כזו היא, למעשה, מה שלוחות האמת עושים. אולם אם נוכל לעשות קביעה כזו של ערכי אמת בלי לבנות ממש את כל לוח האמת, נחסוך חלק מן העבודה.

התבונן בארגומנט:

אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא חסיד הגבלת היזמה הפרטית.
אילו היה המושל קומוניסט, הרי שהיה חסיד הגבלת היזמה הפרטית.
לכן אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא קומוניסט.

ארגומנט זה מסומל כך:

$$S \supset H$$
$$C \supset H$$
$$\therefore S \supset C$$

ובאפשרותנו להוכיח את אי־תקפותו בלי שיהא עלינו לבנות לוח אמת שלם. ראשית אנו שואלים: איזו קביעה של ערכי אמת נחוצה כדי לעשות שהמסקנה תהא שקרית? ברור כי טענת־תנאי הינה שקרית רק כאשר הרישא שלה אמיתית והסיפא שלה שקרית. לכן, קביעת ערך אמת "אמיתי" ל־S ו"שקרי" ל־C יעשה את המסקנה $S \supset C$ לשקרית. ועתה, אם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל־H, שתי ההקדמות נעשות אמיתיות, משום שטענת־תנאי הינה אמיתית תמיד כאשר הסיפא שלה אמיתית. נוכל לומר איפוא, שאם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל־S ול־H, וערך האמת "שקרי" נקבע ל־C, יהיו לארגומנט הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית ובכך מוכחת אי־תקפותו.

דרך זו של הוכחת אי־תקפותו היא תחליף לדרך ההוכחה בעזרת לוח אמת. מכל מקום, שתי הדרכים קרובות זו לזו, ויש להכיר בקשר המהותי שביניהן. למעשה, מה שעשינו בקבענו כנאמר לעיל את ערכי האמת, היה לבנות שורה אחת של לוח האמת לארגומנט הנתון. אפשר שהקשר יראה ביתר בהירות כאשר קביעת ערכי האמת תיכתב בצורה אופקית, כגון

S	H	C	$S \supset H$	$C \supset H$	$S \supset C$
אמיתי	אמיתי	שקרי	אמיתי	אמיתי	שקרי

ובצורה זו הם מהווים שורה אחת בלוח האמת לארגומנט הנתון. ארגומנט מוכח כלא־תקף אם ישנה לפחות שורה אחת בלוח־האמת שלו, שבה כל ההקדמות שלו אמיתיות אולם מסקנתו שקרית. לפיכך איננו צריכים לבדוק את כל שורות לוח האמת של ארגומנט כדי לגלות אי־תקפותו של אותו ארגומנט: די בגילוי שורה אחת ויחידה שבה הקדמותיו אמיתיות כולן ואילו מסקנתו שקרית. הדרך הנוכחית להוכחת אי־תקפות היא דרך של בניית שורה כזאת בלי שיהא עלינו לבנות את לוח האמת כולו.

הדרך הנוכחית קצרה מאשר כתיבת לוח האמת, ושיעור הזמן והעמל הנחסכים גדול יותר יחסית לארגומנטים המכילים מספר גדול יותר של רכיבים פשוטים. לארגומנטים בעלי מספר ניכר של הקדמות, או בעלי הקדמות שסיבוכן רב, אפשר שהקביעה הנדרשת של ערכי אמת לא תהא

קלה. יתכן כי יהיה רצוי לקבוע ערכי אמת אחדים לעשייתן של הקדמות אחדות לאמיתיות לפני שבוהרים קביעה כדי לעשות את המסקנה שקרית. מידה מסויימת של ניסוי וטעייה עשויה להיות נחוצה. אולם בדרך־כלל דרך זו תהא קצרה וקלה יותר מאשר כתיבת לוח האמת בשלמותו.

תרגילים

הוכח אי־תקפותו של כל אחד מן הטיעונים הללו בדרך של קביעת ערכי אמת:

*1.
$A \supset B$
$C \supset D$
$A \vee D$
$\therefore B \vee C$

2.
$\sim (E \cdot F)$
$(\sim E \cdot \sim F) \supset (G \cdot H)$
$H \supset G$
$\therefore G$

3.
$I \vee \sim J$
$\sim (\sim K \cdot L)$
$\sim (\sim I \cdot \sim L)$
$\therefore \sim J \supset K$

4.
$M \supset (N \vee O)$
$N \supset (P \vee Q)$
$Q \supset R$
$\sim (R \vee P)$
$\therefore \sim M$

*5.
$S \supset (T \supset U)$
$V \supset (W \supset X)$
$T \supset (V \cdot W)$
$\sim (T \cdot X)$
$\therefore S \equiv V$

6.
$A \equiv (B \vee C))$
$B \equiv (C \vee A)$
$C \equiv (A \vee B)$
$\sim A$
$\therefore B \vee C$

7.
$D \supset (E \vee F)$
$G \supset (H \vee I)$
$\sim E \supset (I \vee J)$
$(I \supset G) \cdot (\sim H \supset \sim G)$
$\sim J$
$\therefore D \supset (G \vee I)$

8.
$K \supset (L \cdot M)$
$(L \supset N) \vee \sim K$
$O \supset (P \vee \sim N)$
$(\sim P \vee Q) \cdot \sim Q$
$(R \vee \sim P) \vee \sim M$
$\cdot K \supset R$

9.
$(S \supset T) \cdot (T \supset S)$
$(U \cdot T) \vee (\sim T \cdot \sim U)$
$(U \vee V) \vee (S \vee T)$
$\sim U \supset (W \cdot X)$
$(V \supset \sim S) \cdot (\sim V \supset \sim Y)$
$X \supset (\sim Y \supset \sim X)$
$(U \vee S) \cdot (V \vee Z)$
$\therefore X \cdot Z$

10.
$A \supset (B \supset \sim C)$
$(D \supset B) \cdot (E \supset A)$
$F \vee C$
$G \supset \sim H$
$(I \supset G) \cdot (H \supset J)$
$I \equiv \sim D$
$(B \supset H) \cdot (\sim H \supset D)$
$\therefore E \equiv F$

III. אי־עקביות

אם אי־אפשר לקבוע ערכי אמת לטענות פשוטות המרכיבות ארגומנט, באופן שהקדמותיו יעשו אמיתיות ומסקנתו שקרית — הרי שמן ההכרח שהארגומנט תקף. אם כי הדבר נובע מתוך הגדרת ה״תקפות״, יש לו תוצאה מוזרה. התבונן בארגומנט דלהלן, אשר הקדמותיו נראות כחסרות כל שייכות למסקנתו:

אילו היתה למטוס תקלה במנוע, היה נוחת בברידג׳פורט.
אילמלא היתה למטוס תקלה במנוע, היה נוחת בקליבלנד.
המטוס לא נחת לא בברידג׳פורט ולא בקליבלנד.
לכן מן ההכרח שהמטוס נחת בדנבר.

ובתרגומו לשפת־הסמלים:

$A \supset B$
$\sim A \supset C$
$\sim (B \vee C)$
$\therefore D$

כל ניסיון לקבוע ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות אותו, כדי לעשות את מסקנתו לשקרית ואת הקדמותיו לאמיתיות — נדון לכישלון. אם נתעלם מן המסקנה ונרכז את קישבנו במטרה האחרת, של עשיית כל ההקדמות אמיתיות בעזרת קביעת ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות אותן, אחד דיננו להיכשל אף כאן, בתכנית פחות יומרנית זו.

הסיבה שאי־אפשר לעשות את ההקדמות לאמיתיות ואת המסקנה לשקרית היא, שאי־אפשר לעשות את ההקדמות אמיתיות בשום מקרה, בעזרת שום קביעה של ערכי אמת. שום קביעת ערכי אמת איננה יכולה לעשות את ההקדמות לאמיתיות, כיוון שהן לא־עקביות זו עם זו. הקוניונקציה שלהן סותרת את עצמה, בהיותה מקרה הצבה של דפוס טענה סותרת את עצמה. אילו בנינו לוח אמת לארגומנט הנתון, היינו מוצאים בהכרח שבכל שורה, לפחות אחת ההקדמות היא שקרית. אין שום שורה שבה כל ההקדמות אמיתיות ולכן אין שום שורה שבה ההקדמות אמיתיות כולן והמסקנה

שקרית. לכן לוח האמת לארגומנט זה היה מאשר את תקפותו. אפשר לאשר את תקפותו גם בעזרת הוכחה צורנית זו:

1.	$A \supset B$	
2.	$\sim A \supset C$	
3.	$\sim (B \vee C) \;/\; \therefore D$	
4.	$\sim B \cdot \sim C$	3, De M.
5.	$\sim B$	4, Simp.
6.	$\sim A$	1,5, M.T.
7.	C	2,6, M.P.
8.	$\sim C \cdot \sim B$	4, Com.
9.	$\sim C$	8, Simp.
10.	$C \vee D$	7, Add.
11.	D	10,9, D.S.

בהוכחה זו, השורות מלמעלה עד השורה התשיעית מוקדשות לגילוי אי־העקביות, אשר נכללה באופן סמוי בהקדמות. אי־עקביות זו מבצבצת בשורה השביעית והתשיעית. הטוענות C ו־C ~, לפי סדר זה. לאחר שהושגה סתירה גלויה זו, המסקנה נובעת במהירות לפי כלל ההוספה וכלל ההיקש הדיסיונקטיבי.

וכך אנו רואים כי אם מערכת הקדמות איננה עקבית, יביאו הקדמות אלה באופן תקף כל מסקנה, תהא לא־רלבנטית כאשר תהא. תמציתו של העניין נראית ביתר פשטות במקרה הארגומנט כדלהלן, אשר הקדמותיו הלא־עקביות בגלוי מאפשרות לנו להסיק באופן תקף מסקנה לא־רלבנטית ופנטסטית.

היום יום ראשון. היום לא יום ראשון.
לכן הלבנה עשויה מגבינה ירוקה.

בסמלים נקבל:

1. R
2. $\sim R \;/\; \therefore L$

ההוכחה הצורנית לתקפותו מתהוורת כמעט מיד:

3.	$R \vee L$	1, Add.
4.	L	3,2, D.S.

מה איננו כשורה כאן? כיצד יכולות הקדמות כה קלושות ואף לא־עקביות לגרום לכל ארגומנט שבו הן מופיעות שיהא תקף? ראשית, יש לשים לב כי אם ארגומנט הינו תקף בגלל אי־עקביות בהקדמותיו, אין הוא יכול להיות ארגומנט שריר. אם אין ההקדמות עקביות זו עם זו, אי־אפשר שיהיו אמיתיות כולן. שום מסקנה איננה יכולה להתאשר כאמיתית בעזרת ארגומנט בעל הקדמות לא־עקביות, שכן הקדמותיו עצמן הן שקריות בהכרח.

המצב הנוכחי קשור מאוד לדבר המכונה הפרדוקס של האימפליקציה המטריאלית. בדוננו באחרון, הבחנו כי דפוס הטענה $\sim p \supset (p \supset q)$ הוא טאוטולוגיה, שכן מקרי ההצבה שלו הם אמיתיים. ניסוחו בעברית טוען כי "אם טענה הינה שקרית, היא גוררת באופן מטריאלי כל טענה שבעולם", ונקל להוכיחו בעזרת לוחות אמת. מה שגילינו בדיון הנוכחי הוא, שדפוס הטיעון

$$\begin{array}{l} p \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

הוא תקף. הוכחנו כי כל ארגומנט בעל הקדמות לא־עקביות הינו תקף, תהא מסקנתו אשר תהא. דבר זה אפשר לאשר בין בעזרת לוח אמת ובין בעזרת הוכחה צורנית מן הסוג שניתן לעיל.

הקדמותיו של ארגומנט תקף גוררות את מסקנתו לא רק במובן של אימפליקציה "מטריאלית", אלא גם באופן לוגי, או "חמור". בארגומנט תקף, אי־אפשר מבחינה לוגית שההקדמות יהיו אמיתיות כאשר המסקנה שקרית. ומצב זה שורר כל אימת שאי־אפשר מבחינה לוגית שההקדמות יהיו אמי־תיות, אפילו כשמתעלמים משאלת אמיתותה או שקריותה של המסקנה. האנלוגיה של מצב זה עם תכונתה התאומה של האימפליקציה המטריאלית הוליכה כמה לוגיקנים לכנותו בשם "פרדוקס האימפליקציה החמורה". אלא שמנקודת מבטה של ההגדרה הטכנית של הלוגיקן ל"תקפות", אין המצב נראה פרדוקסלי במיוחד. הפרדוקס האמור נובע בעיקר מן הטיפול במונח טכני כאילו היה מונח בשפה הרגילה, היום־יומית.

הדיון הזה מסייע להסביר מדוע כה רב ערכה של העקביות. טעם אחד, כמובן, הוא שטענות לא־עקביות אינן יכולות להיות אמיתיות שתיהן. עובדה זו מוגחת ביסודה של אסטרטגיית חקירת שתי־וערב. שבה התובע עשוי להשתדל לגרום בתמרוניו שעד עוין יסתור את עצמו. אם העדות מכילה

טענות שאינן עולות בקנה אחד, כלומר שהן לא־עקביות, אין היא יכולה להיות אמיתית בשלמותה, ומהימנותו של העד נהרסה — או לפחות נתערערה. אולם טעם אחר לכך שאי־עקביות דוחה כל־כך הוא, שכל מסקנה שבעולם נובעת מבחינה לוגית מטענות לא־עקביות שנתקבלו כהקדמות. טענות לא־עקביות אינן "חסרות־משמעות", הצרה עמן היא בדיוק ההפך. משמעותן רבה מדי — הכל משתמע מהן, במובן זה שהן גוררות אחריהן הכל. ואם הכל נטען, חצי מן הנטען ודאי שהוא שקרי, שכן לכל טענה שלילתה.

הדיון הקודם מספק לנו באקראי פתרון לחידה עתיקה: מה קורה כאשר כוח שאין לעמוד בפניו נתקל בעצם שאין להזיזו? התאור מכיל סתירה, שכן כדי שכוח שאין לעמוד בפניו יתקל בעצם שאין להזיזו, שניהם חייבים להיות קיימים. חייב להיות קיים כוח שאין לעמוד בפניו וחייב להיות קיים גם עצם שאין להזיזו. אולם אם קיים כוח שאין לעמוד בפניו אי־אפשר שיהא קיים עצם שאין להזיזו. והרי הסתירה כשהיא נאמרת במפורש: קיים עצם שאין להזיזו, ולא קיים עצם שאין להזיזו. אם הקדמות לא־עקביות אלה נתונות, אפשר להסיק באופן תקף כל מסקנה. הנה כי כן, התשובה הנכונה לשאלה "מה קורה כאשר כוח שאין לעמוד בפניו נתקל בעצם שאין להזיזו?" היא: "הכל!".

תרגילים

לכל אחד מן הטיעונים הללו, בנה הוכחה צורנית לתקפותו — או הוכח אי־תקפותו בדרך של קביעת ערכי אמת לטענות הפשוטות הכלולות בו.

* 1. אם צודקים חוקרי הלשון, הרי שאם יותר מדיאלקט אחד היה מצוי ביוון העתיקה, הרי ששבטים שונים ירדו בתקופות שונות מן הצפון. אם שבטים שונים ירדו בתקופות שונות מן הצפון, מן ההכרח שהם באו מעמק נהר הדנובה. אולם חפירות ארכיאולוגיות חייבות היו לגלות שם עקבות שבטים שונים אם שבטים שונים באו בתקופות שונות מן הצפון, וחפירות ארכיאולוגיות לא גילו עקבות כאלה. מכאן שאם יותר מדיאלקט אחד היה מצוי ביוון העתיקה, הרי שחוקרי הלשון אינם צודקים. (C, J, S, E, A)

2. אם ישנם הסימפטומים הרגילים של הצטננות וחומו של החולה גבוה, הרי שאם ישנן נקודות קטנות על עורו, הוא לקה בחצבת. ברור שלא יתכן כי החולה לקה בחצבת אם כרטיסו מראה כי סבל ממחלה זו לפני־כן.

חומו של החולה גבוה וכרטיסו מראה כי הוא סבל מחצבת לפני־כן. מלבד הסימפטומים הרגילים של ההצטננות, יש נקודות קטנות על עורו. אני מסיק כי החולה לקה באילוח שנגרם מנגיף. (R, G, N, H, K, I)

3. אילו רצה האל למנוע רשע, אולם לא היה מסוגל לעשות כן, היה חסר־אונים; אילו היה מסוגל למנוע רשע, אולם לא רצה לעשות כן, היה שואף־לרע. רשע יכול להיות קיים רק אם האל הוא או לא־רוצה או לא־מסוגל למנעו. קיים רשע. אם האל קיים אין הוא לא חסר־אונים ולא שואף־לרע. לכן האל איננו קיים. (R, M, H, S, K, E)

4. אם אקנה מכונית חדשה באביב זה או אתקן את מכוניתי הישנה, הרי שאסע לקנדה בקיץ זה ואחנה בדולות. אבקר אצל הורי אם אחנה בדולות. אם אבקר אצל הורי, הם ידרשו בתוקף שאבלה את הקיץ אצלם. אם הם ידרשו בתוקף שאבלה את הקיץ אצלם, אהיה שם עד הסתיו. אולם אם אשהה שם עד הסתיו, הרי שבסופו של דבר לא אסע לקנדה! לכן לא אתקן את מכוניתי הישנה. (H, A, C, D, B, J, S)

* 5. אם סמית נבון ולומד קשה, הרי שיזכה בציונים טובים ויעבור את הקורסים שלו. אם סמית לומד קשה אך איננו נבון, הרי שמאמציו יזכו להערכה; ואם מאמציו יזכו להערכה, הרי שיעבור את הקורסים שלו. אם סמית נבון, הרי שהוא לומד קשה. לכן סמית יעבור את הקורסים שלו. (N, L, T, J, H)

6. אם קיימת אמת־מידה יחידה לגדלותה של שירה, הרי אי־אפשר שמילטון ואדגר גסט יהיו שניהם משוררים גדולים. אם או פופ או דריידן נחשבים למשוררים גדולים, הרי שוורדסוורת ודאי שאיננו משורר גדול; אולם אם וורדסוורת איננו משורר גדול, הרי שלא קיטס ולא שלי אינם משוררים גדולים. אולם ככלות הכל, אם כי אדגר גסט איננו משורר גדול, דריידן וקיטס שניהם משוררים גדולים. מכאן שאין אמת־מידה יחידה לגדליתה של שירה. (A, M, G, P, D, W, K, S)

7. אם רב־המלצרים היה נוכח, היו רואים אותו; ואם היו רואים אותו, היו חוקרים אותו. אם היו חוקרים אותו, הוא היה משיב; ואם הוא היה משיב, היו שומעים אותו. אולם לא שמעו את רב־המלצרים. אם לא ראו ולא שמעו את רב־המלצרים, הרי שמן ההכרח שמילא תפקידו; ואם מילא תפקידו, מן ההכרח שהיה נוכח. לכן את רב־המלצרים חקרו. (N, R, H, M, S, T)