

תרגיל בית 3 - תורת גלואה סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1. הוכיחו שהפולינום $p(x) = x^3 + 9x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ הוא אי-פריק. נניח θ הוא שורש של $p(x)$. חשב ואת ההופכי של $1 + \theta$ ב $\mathbb{Q}[\theta]$.

שאלה 2. חשבו את:

1. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}]$

2. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$

שאלה 3. מצאו את הפולינום המינימלי של:

1. $i + \sqrt{2}$ מעל \mathbb{Q} . (טיפ: $\mathbb{Q}[i + \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}, i]$)

2. $i + \sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}[i]$.

3. $\sqrt[3]{7}$ מעל \mathbb{Q} .

4. $\sqrt[3]{7}$ מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ (רמז: שיקולי מימד).

שאלה 4. תהיינה הרחבות אלגבריות

$$[F[a] : F] = n$$

$$[F[b] : F] = m$$

1. הוכיחו כי $[F[a, b] : F] \leq n \cdot m$.

2. אם בנוסף $(n, m) = 1$ הוכיחו כי $[F[a, b] : F] = n \cdot m$.

3. בנוס: מצאו דוגמא להרחבות עבורן אין שיויון.

שאלה 5. הזכרו שהוכחנו כי $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$. מצאו פולינום מינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ מעל \mathbb{Q} .

שאלה 6. חשבו את:

1. $[\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}] : \mathbb{Q}]$

2. $[\mathbb{Q}[\rho_{12}] : \mathbb{Q}]$ כאשר ρ_{12} הוא שורש יחידה-12 פרימיטיבי הרגיל.