אינפי 1 החממה תרגול 9

21 בדצמבר 2020

1 הגדרת גבול פונקציה לפי היינה

הגדרה: תהי $f : X \to \mathbb{R}$ (כאשר $X \subset \mathbb{R}$) פונקציה. נאמר ש$L \in \mathbb{R}$ הוא גבול הפונקציה בנק' a אם לכל סדרה $a \neq x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to L$.

תרגילים:

1. מצאו $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+6}$, והוכיחו לפי הגדרה.
פתרון: $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. הוכחה: תהי $2 \neq x_n \to 2$, נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+2}{x_n^2+6} = \frac{\lim x_n + 2}{\lim x_n^2 + 6} = \frac{2+2}{4+6}$$

2.

(א) מצאו פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורה הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים, והגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ קיים.

(ב) האם יש פונקציה שבה קורה ההיפך?

פתרון: א) נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ואז הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ לא קיים כי ניקח את הסדרות:

$$x_n = \frac{n}{2}, y_n = n + \sqrt{2}$$

נשים לב שכיון ש- $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ נקבל $\forall n : f(x_n) = 1$, ולכן $f(x_n) \to 1$.
מאידך כיון ש- $\{y_n\} \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, ולכן $\forall n : f(y_n) = 0$, ולכן $f(y_n) \to 0$.
מצאנו שתי סדרות שסדרת התמונות שואפת לגבול שונה, ולכן לפונקציה אין

גבול.

הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ קיים, כי מתקיים $\forall n: f(n)=1$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=1$.

ב. ההיפך לא יכול לקרות. אם $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ לא קיים, אז מצאנו סדרה $x_n=n$ שעבורה אין גבול $\lim f(x_n)$, ולכן אין גבול לפונקציה.

3. נגדיר $\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ זו פונקציה. מצאו $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sign}(x)$.

פתרון: תהי $0\neq x_n\to 0$. נקבל $f(x_n)=x_n\operatorname{sign}(x_n)$ זו אפסית כפול חסומה ולכן מתכנסת ל-0.

4. הוכיחו שלא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$.

פתרון: ניקח $x_n=\frac{1}{n}$ ונקבל $f(x_n)=\frac{1}{n^2}+n\to\infty$. ניקח $y_n=-\frac{1}{n}$ ונקבל $f(y_n)=\frac{1}{n^2}-n\to-\infty$. עבור סדרות שונות מצאנו גבולות שונים ולכן הגבול לא קיים.

5. הוכיחו שלא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

ניקח את הסדרה $x_n=\frac{1}{\pi n}$ ונקבל $f(x_n)=\cos \pi n$, ולסדרה זו אין גבול, ולכן אין גבול לפונקציה ב-0.

6. עבור אילו $a\in\mathbb{R}$ קיים הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ עבור הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

פתרון: נניח שקיים הגבול ב-a. לכן יש סדרה $a\neq x_n\to a$ כך ש-$\{x_n\}\subset\mathbb{Q}$, ויש סדרה $a\neq y_n\to a$ כך ש-$\{y_n\}\subset(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, וכיון שהגבול קיים נקבל:

$$a^2=y_n^2=\lim f(y_n)=\lim f(x_n)=\lim 2x_n-1=2a-1$$

ולכן נקבל $a=1$.

נותר להוכיחו שב-$a=1$ באמת קיים הגבול (בשאר הוכחנו שלא) (ובמקרה זה הגבול הוא 1). תהי $x_n\to 1$, נראה $f(x_n)\to 1$. כיון שעבור תת סדרה $\{x_{n_k}\}\subset\mathbb{Q}$ מתקיים $f(x_{n_k})\to 1$, וכן עבור תת סדרה $\{x_{n_k}\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ מתקיים $f(x_{n_k})\to 1$, לכן כל הגבולות החלקיים הם 1, ולכן הגבול הוא 1.

7. נסמן $f(x)=\lfloor x\rfloor=\max\{k\in\mathbb{Z}: k\leq x\}$. הוכיחו: קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ אם ורק אם $x_0\notin\mathbb{Z}$.

פתרון: $\Rightarrow$: נניח $x_0\notin\mathbb{Z}$: תהי $x_n\to x_0$. לפי מה שלמדנו בסדרות לבסוף $x_n\subset\left[\lfloor x_0\rfloor,\frac{\lfloor x_0\rfloor+1+x_0}{2}\right]$, ואז $f(x_n)$ לבסוף קבועה $\lfloor x_0\rfloor$, ולכן $f(x_n)\to\lfloor x_0\rfloor$.

בכיוון השני $\Leftarrow$ נראה באופן שקול שאם $x_0 \in \mathbb{Z}$ אז לא קיים הגבול: ניקח סדרה $x_n = x_0 + \frac{1}{n+1}$ ונקבל $f(x_n) = x_0 \to x_0$, ואם ניקח $y_n = x_0 - \frac{1}{n}$ נקבל $f(y_n) = x_0 - 1 \to x_0 - 1$, ולכן אין גבול.

8. יהי $n \in \mathbb{N}$. חשבו $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$.
פתרון:

$$\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{x^2-1}{x-1} + \cdots + \frac{x^n-1}{x-1} =$$

$$= 1 + (1+x) + (1+x+x^2) + \cdots + (1+x+\cdots+x^{n-1})$$

כעת אם $x_m \to 1$ אז נקבל

$$f(x_m) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 גבול של פונקציה לפי קושי

הגדרה: נאמר ש־$L \in \mathbb{R}$ גבול של $f(x)$ בנקודה a אם: לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-a| < \delta$ אז $|f(x) - L| < \epsilon$. במילים של סביבות: לכל סביבה של L קיימת סביבה של a כך שלכל x בסביבה תמונתו בסביבה של L.
תרגילים:

1. הוכיחו $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+5} = 0$ לפי הגדרה.
פתרון: יהי $\epsilon > 0$, צריך למצוא $\delta > 0$ כך שאם $|x-1| < \delta$ אז $|f(x) - 0| < \epsilon$.

$$|f(x) - 0| < \epsilon \iff \left|\frac{x-1}{x^2+5}\right| < \epsilon$$

כעת נשים לב:

$$\left|\frac{x-1}{x^2+5}\right| \le \left|\frac{x-1}{5}\right| \le |x-1|$$

כעת נבחר $\delta = \epsilon$ ונקבל שאם $|x-1| < \delta$ אז לפי החישוב שעשינו $\left|\frac{x-1}{x^2+5}\right| \le |x-1| < \delta = \epsilon$. מש"ל.