

2 התחלה

התחלה התחלה

התחלה התחלה 1
: התחלה

$$\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$$

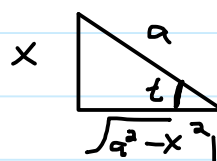
$$= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C$$

$t = x + \frac{1}{2}$
 $dt = dx$

$$= \arctan(x + \frac{1}{2}) + C$$

2 ע"מ $a > 0$ התחלה התחלה : התחלה
התחלה התחלה התחלה , התחלה : $a > 0$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}$$



התחלה

$$\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow a \sin t = x$$

$$a \cos t = \sqrt{a^2 - x^2} \leftarrow$$

$$x = a \sin t$$
$$dx = a \cos t dt$$

התחלה התחלה

$$= \int a \cos t (a \cos t) dt = \int a^2 \cos^2 t dt =$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x && \text{ענין גלגול:} \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

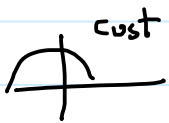
||

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int 1 dt$$

$$a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) = \frac{a^2}{2} \left(\sin \left(\frac{2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)}{2} \right) + \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) + C$$



$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ \frac{x}{a} &= \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \end{aligned}$$

הנני $\cos t \geq 0$ \Rightarrow $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ כערה:

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b)$$

הצבה סימולטניה אלגוריתם:

בגן אה-גד פלך הצ'ורניו $\sin x$ אפולו $\cos x$ אפולו
 הצ'ורניו $> t$

אפולו:

$$\frac{7 \sin x + 3}{\cos x}, \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin x}, \quad \frac{1}{\sin x}$$

אפולו:

$$\frac{x^3}{\cos x}, \quad \frac{\sin 8x}{\cos x}$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

הנה, זהו, $\frac{dx}{dt}$

$$dt = \frac{\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2}(1+t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

הנה, זהו

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{הנה, זהו, } \frac{dx}{dt}$$

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

הנה, זהו, $\frac{dx}{dt}$ הנה, זהו

הנה, זהו, $\frac{dx}{dt}$ הנה, זהו

$$\int \frac{1}{x^k} = \int x^{-k} = \frac{x^{-k+1}}{-k+1}$$

$$\int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a| \quad 1$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x+a)^{k-1}} \quad 2$$

$$b^2 - 4c < 0 \quad \text{כאשר} \quad \int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \ln|x^2+bx+c| \quad 3$$

$$b^2 - 4c < 0 \quad \text{כאשר} \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+bx+c)^k} dx = \frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}} \quad 4$$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^m} dx = \frac{1}{a^{2m}} \int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^m} dx$$

5

$$t = \frac{x}{a} \Rightarrow dx = a dt$$

$$\frac{1}{a^{2m}} \int \frac{a dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1}{a^{2m-1}} \int_m(t)$$

כאשר $a > 0$ ו- $a < 0$ ו- $a > 0$ ו- $a < 0$

הטענה: \int פונקציה רציונלית להבדיל לפני פירוק

הצגת פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$
 חלק א: חילוק פולינומים

פתרון: $\int \frac{x^4 - 4x^2 + 2x + 5}{x-2} dx$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 + 2 \\ x^4 - 4x^2 + 2x + 5 \sqrt{x-2} \\ - x^4 - 2x^3 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 + 2x + 5 \\ - 2x^3 - 4x^2 \\ \hline 2x + 5 \\ - 2x - 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 2x + 5}{x-2} = x^3 + 2x^2 + 2 + \frac{9}{x-2}$$

כאשר:

$$\Rightarrow \int x^3 + 2x^2 + 2 + \frac{9}{x-2} dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 2x + 9 \ln|x-2| + C$$

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

מנתה חלק אף נשאנו עם

נאשר המנהל של המספר גבולה מהמנהל של המונה.

חלק ג': פרוק לגורמים חלקיים:

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx = \int \frac{1}{(x+2)(x-2)} dx \quad \text{זאמא:$$

לפרוק זאמא לגורמים פרימיטיביים:

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

מכאן נראה שיש שני שברים, שכל אחד מהם יכול להיות נפרד לכל ערך של x.

$$x = -2: 1 = 0 + B(-4) \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$x = 2: 1 = 4A + 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-2)} dx = \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+2} \right) dx \quad \text{לפרוק}$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$$

$$\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx = \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx \quad \text{זאמא זאמא}$$

הערה: 1. פולנום ממנה 1 גמ'ז ט'י פריק.
 2. יכול להיות פריק זאמא לזא פריק.
 3. וזאג הטא פריק.

לפיכך, אפשר לתקן:

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

מכאן אפשר

$$2x+4 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

$$2x+4 = x^2(A+C) + x(-2A+B) + 1(-2B)$$

x² 1) 0 = A+C ⇒ C = -A ⇒ C = 2

x 2) 2 = -2A+B ⇒ A = -2

1-x⁰ 3) 4 = -2B B = -2

ולכן

$$\int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx = \int \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2} dx$$

$$= -2 \ln|x| + \frac{2}{x} + 2 \ln|x-2| + C$$

כאליה אפשר בקלות לתקן:

אזכר ש אזכר גורם מוגזרה

לפיכך הטבלה:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

ואזכר ש אזכר במחלקה מהצורה

ייתכן שה הטבלה:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

תרגילים (פירוק לגורמים חזקים):

$$\frac{\square}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad (1)$$

$$\frac{\square}{x^3(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-4} + \frac{E}{(x-4)^2} \quad (2)$$

$$\frac{\square}{(4x-3)(2x+7)} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+7} \quad (3)$$

$$\frac{\square}{(4x-3)(2x+7)} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+7} \quad (4)$$

$$\frac{\square}{(x^2+6)(x^2+x+9)} = \frac{Ax+B}{x^2+6} + \frac{Cx+D}{x^2+x+9} \quad (5)$$

$$\frac{\square}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \quad (6)$$

$$\frac{\square}{(x^2+1)^2(x-6)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{E}{x-6} \quad (7)$$