מבוא לתורת החבורות תרגיל בית 8 תשע"ח.

1. הוכיחו: אם $N \trianglelefteq G$ ו$K \leq G$ אזי:

   (א) $NK = KN$

   הוכחה:

   $NK = \cup_{k\in K} Nk = \cup_{k\in K} kN = KN$ המעבר השני נובע מכך שN תת חבורה נורמלית.

   (ב) $NK \leq G$

   הוכחה:

   איבר יחידה: $e = e \cdot e \in NK$

   סגירות לכפל: יהיו $n_1k_1, n_2k_2 \in NK$. אזי

$$(n_1k_1)(n_2k_2) = n_1k_1n_2k_2 = n_1n_2'k_1k_2 \in NK$$

   השוויון השלישי נובע מכך שN תת חבורה נורמלית, לכן $Nk_1 = k_1N$. $k_1n_2 \in k_1N = Nk_1$. כלומר, קיים $n_2' \in N$ כך ש $k_1n_2 = n_2'k_1$.

   הופכי: יהי $nk \in NK$. $(nk)^{-1} = k^{-1}n^{-1} \in KN = NK$. (הערה: מכיוון ש$K$ ו N תת חבורות, אז אם יש בהן איבר, גם ההופכי שלו נמצא)

   (ג) אם $K \trianglelefteq G$ אז $NK \trianglelefteq G$

   יהי $g \in G$. אזי $gNK = NgK = NKg$. מש"ל.

2. סימון: לכל שדה $\mathbb{F}$ נסמן $\mathbb{F}^\times = (\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$. הוכיחו:

   (א) $\mathbb{C}^\times / \{-1, 1\} \cong \mathbb{C}^\times$

   נגדיר $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ ע"י $f(x) = x^2$.

   הומומורפיזם: $f(xy) = (xy)^2 = xyxy = xxyy = x^2y^2$.

   על: ידוע שלכל איבר במרוכבים יש שורש.

נחשב את הגרעין:

$$\ker f = \{x \in \mathbb{C}^\times : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

לכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $\mathbb{C}^\times/\{-1,1\} \cong \mathbb{C}^\times$.

(ב) $\mathbb{C}^\times/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}_+$
נגדיר: $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_+$ ע"י $f(x) = |x|$.
הומומורפיזם: ידוע שערך מוחלט הוא כפלי.
על: מקור אפשרי של r הוא r בעצמו.
גרעין: $\ker f = \{x \in \mathbb{C}^\times : |x| = 1\} = \mathbb{T}$

3. תהי $f : G \to H$ אפימורפיזם. ויהי $K \trianglelefteq H$. הוכיחו:

(א) $f^{-1}(K) \leq G$.
הוכחה:

איבר יחידה:

$e \in K$. לכן $e \in f^{-1}(K)$, כי $f(e) = e \in K$.

סגירות לפעולה: יהיו $g_1, g_2 \in f^{-1}(K)$. כלומר, $f(g_1), f(g_2) \in K$. אזי $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) \in K$ ולכן $g_1g_2 \in f^{-1}(K)$.

סגירות להופכי: יהי $g \in f^{-1}(K)$. כלומר, $f(g) \in K$. אזי $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \in K$ ולכן $g^{-1} \in f^{-1}(K)$.

במהלך ההוכחה הסתמכנו על כך שK תת חבורה ולכן מקיימת את כל התכונות הנדרשות.

(ב) $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.
הוכחה:

נוכיח סגירות להצמדות.

יהיו $h \in G, g \in f^{-1}(K)$. אזי $f(hgh^{-1}) = f(h)f(g)f(h)^{-1} \in K$ כי $f(g) \in K$ ו K סגורה להצמדות. לכן, $hgh^{-1} \in f^{-1}(K)$.

(ג) $G/f^{-1}(K) \cong H/K$.
הוכחה:

נגדיר העתקה $\tilde{f} : G \to H/K$ ע"י $\tilde{f}(g) = f(g)K$. נוכיח שזה הומומורפיזם:
$\tilde{f}(g_1g_2) = f(g_1g_2)K = f(g_1)f(g_2)K = f(g_1)Kf(g_2)K = \tilde{f}(g_1)\tilde{f}(g_2)$.

על: יהי $xK \in H/K$. f על ולכן יש $g \in G$ $f(g) = x$. טענה: $\tilde{f}(g) = xK$. הוכחה: $\tilde{f}(g) = f(g)K = xK$.

נחשב את הגרעין: $\tilde{f}(g)=e \iff f(g)K=e \iff f(g)\in K \iff$ $g\in f^{-1}(K)$.

כלומר, קיבלנו אפימורפיזם $\tilde{f}:G\to H/K$ שהגרעין שלו הוא בדיוק $f^{-1}(K)$ ולכן ממשפט האיזו' הראשון: $G/f^{-1}(K)\cong H/K$.

4.

(א) חשבו את כל חבורות המנה של D_4.

פתרון: ראינו בתרגיל הקודם כי תתי החבורות הנורמליות של D_4הן:
$H_1=\{id\}$ $H_2=D_4 H_3=\langle\sigma\rangle H_4=\langle\sigma^2,\sigma\tau\rangle H_5=\langle\tau,\sigma^2\rangle H_6=\langle\sigma^2\rangle$.

נחשב את חבורות המנה: $G/H_1\cong G$ $G/H_2\cong\{id\}$ עבור $|H_i|=4$ עבור $3\leq i\leq 5$ ולכן G/H_i עם שני איברים ולכן איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2$. $|H_5|=2$ ולכן G/H_5 בת 4 איברים ולכן איזומורפית ל $\mathbb{Z}_4$ או $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. נבדוק איזה אפשרות נכונה: לכל $\sigma^i\tau\in D_4$ מתקיים כי

$$\left(\sigma^i\tau\right)^2=\sigma^i\tau\sigma^i\tau=\sigma^i\tau\tau\sigma^{4-i}=\sigma^i\sigma^{4-i}=id$$

ולכן $\sigma^i\in D_4$ מתקיים

$$\left(\sigma^i\right)^2=\sigma^{2i}\in\left\langle\sigma^2\right\rangle$$

ולכן לכל $g\in D_4$ מתקיים כי $g^2\in D_4$ ולכן אין איבר ב G/H_5 מסדר 4.
לכן $G/H_5\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

(ב) חשבו את כל תת החבורות של $D_4/\langle\sigma^2\rangle$.

פתרון: תת החבורות הם מהצורה $\{h\langle\sigma^2\rangle\,|\,h\in H\}=H/\langle\sigma^2\rangle$ עבור $D_4\leq H\leq\langle\sigma^2\rangle$. האפשרויות ל H הן

$$H\in\left\{D_4,\left\langle\sigma^2\right\rangle,\left\langle\sigma^2,\tau\right\rangle,\left\langle\sigma^2,\sigma\tau\right\rangle,\left\langle\sigma\right\rangle\right\}$$

5. תהי $G=\mathbb{Z}^\infty$ כל הסדרות האינסופיות מעל $\mathbb{Z}$ עם פעולת חיבור רכיב־רכיב. נסמן בH את תת החבורה של הסדרות (a_i) כך ש $a_1=0$. למה איזומורפי G/H?

פתרון: נגדיר $\phi:G\to\mathbb{Z}$ ע"י $\phi\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)=a_1$.

טענה: ϕ הומומורפיזם. הוכחה:

$$\phi\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}+(b_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)=\phi\left((a_i+b_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)=a_1+b_1=\phi\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)+\phi\left((b_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$$

טענה: ϕ על. הוכחה: יהא $a\in\mathbb{Z}$ אזי הסדרה $a\mapsto a000000\ldots$.

נחשב את הגרעין

$$\ker\phi=\left\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\,|\,\phi\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)=a_1=0\right\}=H$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל כי

$$G/H\cong\mathbb{Z}$$

6. תהי G חבורה ו$H,K\leq G$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $H\cong K$ אז $G/H\cong G/K$.
פתרון: נגדיר $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ אזי

$$H=\mathbb{Z}_2\times\{0\}\cong\mathbb{Z}_2\cong K=\{0\}\times 2\mathbb{Z}_4$$

אבל $G/H\cong\mathbb{Z}_4$ ו $G/K\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$(כי $\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2$). והם לא איזומורפיות.

(ב) אם $G/H\cong G/K$ אז $H\cong K$.
פתרון: נגדיר $G=\mathbb{C}^\times$ ו $H=\{-1,1\}\,,K=\{1\}$ אזי

$$G/K\cong\mathbb{C}^\times\cong G/H$$

אבל H,K אינם איזומורפיות.

7. תהי G חבורה ו$H,K\trianglelefteq G$ תת חבורות נורמליות כך ש $([G:K],[G:H])=1$.
הוכיחו ש$G=KH$.

(א) משאלה 1 נקבל שHK גם תת חבורה נורמלית. כמו כן, $H,K\leq HK$.
לכן, מכפליות האינדקס,

$$[G:HK]|[G:H],[G:K]$$

לפי הנתון נקבל $[G:HK]=1$ ולכן $G=HK$. מש"ל.