מבוא לאלגברה לינארית - תרגיל 6

תרגיל 1. תהי $A=\{v_1,...v_n\}$ קבוצה ת"ל פורשת את V. הוכח שקיים $v_i\in A$ כך שהקבוצה $A/\{v_i\}$ (הקבוצה A בלי הווקטור v_i) עדיין תפרוש את V.

פתרון.

נתון ש-$A=\{v_1,...v_n\}$ ת"ל לכן קיים צ"ל לא טרוויאלי שיתן $\overrightarrow{0}$ כלומר

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n=0$$

וקיים $\alpha_i\neq 0$ נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות) ש-$\alpha_n\neq 0$ ונקבל

$$v_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}v_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}v_2-...-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}v_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}-\frac{\alpha_i}{\alpha_n}v_i$$

משמע $v_n\in Span\{A/\{v_n\}\}$, מכאן

$$\begin{aligned}
Span(A) &= \left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i\middle|\forall\beta_i\in\mathbb{R}\right\} &=\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i v_i+\beta_n v_n\middle|\forall\beta_i\in\mathbb{R}\right\} &=\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i v_i+\beta_n\sum_{i=1}^{n-1}-\tfrac{\alpha_i}{\alpha_n}v_{i-1}\middle|\forall\beta_i,\exists\alpha_i\in\mathbb{R}\right\} &=\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{n-1}-\tfrac{\beta_n\alpha_i}{\alpha_n}v_{i-1}\middle|\forall\beta_i,\exists\alpha_i\in\mathbb{R}\right\} &=\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\beta_i-\tfrac{\beta_n\alpha_i}{\alpha_n}\right)v_i\middle|\forall\beta_i,\exists\alpha_i\in\mathbb{R}\right\} &= Span\{A/\{v_n\}\}
\end{aligned}$$

תרגיל 2. תהי $A=\{v_1,...v_n\}$ קבוצה בת"ל שלא פורשת את V. הוכח שקיים $w\in V$ כך שהקבוצה $A\bigcup\{w\}$ (הקבוצה A עם הווקטור w) עדיין בת"ל.

פתרון.

כיוון ש-A אינה פורשת את V אז קיים $w\in V/Span\{A\}$ כלומר $w\notin Span\{A\}$ נראה ש$A\bigcup\{w\}$ עדיין בתל.

נניח השלילה ש-$A\bigcup\{w\}$ ת"ל לכן קיים צ"ל לא טרוויאלי שיתן $\overrightarrow{0}$ כלומר

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n+\beta w=0$$

נחלק לשני מקרים:

* $\beta = 0$ אז

$$\begin{array}{c} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\ \Downarrow \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \end{array}$$

וזה צ"ל לא טריוואלי של A נותן $\overrightarrow{0}$ בסתירה לכך ש-A בת"ל.

* $\beta \neq 0$ אז

$$\begin{array}{c} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\ \Downarrow \\ w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - -\frac{\alpha_n}{\beta} v_n \end{array}$$

וזה צ"לשל A נותן w בסתירה לכך ש-A $w \notin$.

קיבלנו סתירה, ולכן $A \bigcup \{w\}$ בת"ל

תרגיל 3. חשב את המימד של

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + z + 2w = 0 \end{cases} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

פתרון.

כדי למצוא את המימד צריך למצוא בסיס ואז המימד שווה למספר הווקטורים בבסיס.

נמצא פתרון כללי למערכת

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left\{ \begin{array}{c} x+y+z+w=0 \\ x+z+2w=0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left\{ \begin{array}{c} w=t \\ z=s \\ y=t \\ x=-s-2t \end{array} \right. \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2t-s \\ t \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\} = Span \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 4. צמצם/הרחב את הקבוצות הבאות כך שהתקבל בסיס למ"ו הרלוונטי.

1. $$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון.

Aהיא קבוצה של 4 ווקטורים ב-$\mathbb{R}^3$ לכן יש בה ווקטור "מיותר", נמצא אותו בעזרת חיפוש הצ"ל שנותן 0.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\1&2&3&3&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\0&1&3&2&0\\0&1&1&2&0\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&0\\0&1&3&2&0\\0&0&-2&0&0\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}\gamma=0\\\delta=1\\\beta=-2\\\alpha=1\end{cases}$$

לכן בסהכ מתקיים

$$1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

לכן לפי השאלה הראשונה אם נוריד את הווקטור שהוא ת"ל נקבל שהמרחב הנפרש לא משתנה כלומר $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא קבוצה בת"ל (מוזמנים לבדוק) בעלת 3 ווקטורים לכן לפי משפט שלישי חינם היא בסיס ל- $\mathbb{R}^3$

הערה: ניתן להוריד גם את הווקטור הראשון הוא השני, אך לא ניתן להוריד את הווקטור שלישי!

.2 $A=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\4&-2\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

A היא קבוצה של 2 ווקטורים(מטריצות) ב-$\mathbb{R}^{2\times 2}$ לכן "חסרים" לה שני ווקטורים(מטריצות) בכדי להיות בסיס, נמצא אותו בעזרת מציאת מטריצות $B_1,B_2\notin Span\{A\}$.ראשית נמצא ביטוי של $Span\{A\}$ בעזרת משוואות:

$$\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1&3\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\1&3&y\\1&4&z\\1&-2&w\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&4&y-x\\0&5&z-x\\0&-1&w-x\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&-1&w-x\\0&5&z-x\\0&4&y-x\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&-1&w-x\\0&0&z+5w-6x\\0&0&y+4w-5x\end{array}\right)$$

לכן בסהכ מתקיים

$$Span\left\{A\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\middle|\begin{cases}z+5w-6x=0\\y+4w-5x=0\end{cases}\right\}$$

שימו לב, כדי לבטיח ששתי המטריצות שבחרנו יתנו בסוף קבוצה בת"ל יש לבחור שתי מטריצות שכל אחת מקיימת תנאי אחד ולא מקיימת את השני אבל אם תבחרו שתי מטריצות ששתיהן לא מקיימות שאת שני התנאים יתכן ותקבלו קבוצה ת"ל.

- $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\6&0\end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי הראשון, אך את השני לא מקיימת.
- $B_2=\begin{pmatrix}1&5\\0&0\end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי השני, אך את הראשון לא מקיימת.

בסה"כ $B=A\bigcup\{B_1,B_2\}=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\4&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\6&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&5\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ היא בת"ל (לפי שאלה 2) עם 4 איברים ולכן בסיס ל-$\mathbb{R}^{2\times2}$

3. $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

פתרון.

A היא קבוצה של וקטור אחד ב-$\mathbb{R}^3$ לכן "חסרים" לה שני ווקטורים בכדי להיות בסיס, החד עין שמו לב שזה הווקטור הראשון מהבסיס הסטנדרטי ולכן אפשר להשלים את A לבסיס הסטנדרטי ולקבל $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, לאלו שלא שמו לב ניתן לעשות את זה בדרך הרגילה ולקבל

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}\right\}$$

שימו לב, כדי לבטיח ששני הווקטורים שבחרנו יתנו בסוף קבוצה בת"ל יש לבחור שני ווקטורים שכל אחד מקיים תנאי אחד ולא מקיים את השני אבל אם תבחרו שני ווקטורים ששניהם לא מקיים שאת שני התנאים יתכן ותקבלו קבוצה ת"ל(למשל $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ אינה בחירה טובה).

- $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי הראשון, אך את השני לא מקיימת.
- $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי השני, אך את הראשון לא מקיימת.

בסה"כ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=B=A\bigcup\{v_1,v_2\}$ היא בת"ל (לפי שאלה 2) עם 3 איברים ולכן בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

תרגיל 5. מהו הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times2}$? והוכח שהוא באמת בסיס.

פתרון.
הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times2}$ הוא

$$B=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{11}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}_{E_{12}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}_{E_{21}},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{E_{22}}\right\}$$

נראה שהוא בסיס בעזרת משפט השלישי חינם.

- בת"ל: יהיו $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\\delta=0\end{cases}$$

לכן B בת"ל.

- מספר איברים

$$|B| = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right)$$

לכן לפי משפט שלישי חינם. B היא בסיס ל-$\mathbb{R}^{2\times 2}$

תרגיל 6. הצג את המטריצה $\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$ כצירוף ליניארי של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון.
צריך למצוא $\alpha\beta\gamma\delta \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

וזה שקול לפתור את המערכת

$$\begin{cases} 1\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = 30 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma + 1\delta = 24 \\ 3\alpha + 4\beta + 1\gamma + 2\delta = 22 \\ 4\alpha + 1\beta + 2\gamma + 3\delta = 24 \end{cases}$$

ואחרי פתרון המערכת נקבל ש-

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3, \quad \delta = 4$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!!