אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 8

יש לרשום על דף התרגיל שם מלא ומספר ת.ז.

1. מצאו מטריצה מייצגת (על פי הבסיס הסטנדרטי) להתאמות הלינאריות הבאות:

(א) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$.

פתרון:
נחשב
$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$
ולכן המטריצה המייצגת היא $[T]=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(ב) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המקיימת:
$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

פתרון:
לפי הנוסחא שמצאנו בתרגיל 7:
$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\1\\1/3\end{pmatrix}.$$
ולכן המטריצה המייצגת היא $[T]=\begin{pmatrix}-1/2&1/3\\-1/2&1\\1/2&1/3\end{pmatrix}$.

(ג) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+z\\y-w\\x+y-w\end{pmatrix}$.

פתרון:
נחשב

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

,

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

,

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

,

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

.

ולכן המטריצה המייצגת היא $[T]=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$.

(ד) $T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\x\end{pmatrix}$.

פתרון:
נחשב:
$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, : $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

ולכן המטריצה המייצגת היא $[T]=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

(ה) $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z+y\\-y\\x\end{pmatrix}$.

פתרון:
נחשב:

$.T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ולכן המטריצה המייצגת היא $.[T]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

2. עבור ההתאמות שבשאלה 1, קבעו האם הן חח"ע ועל.

פתרון:

נזכיר שכאשר העתקה נתונה ע"י כפל במטריצה A: הגרעין הוא מרחב הפתרונות של $Ax=0$, והתמונה היא המרחב הנפרש ע"י העמודות של A.

(א) המטריצה שמצאנו היא $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. נדרג אותה ... ונקבל $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן $KerT=0$ מה שאומר שT חח"ע.

העמודות הן הבסיס הסטנדרטי ולכן ברור ש $\mathrm{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$ מה שאומר שT היא על.

(ב) המטריצה שמצאנו היא $\begin{pmatrix}-1/2&1/3\\-1/2&1\\1/2&1/3\end{pmatrix}$. נדרג ... ונקבל $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן $\ker T=0$ מה שאומר שT חח"ע.

$\mathrm{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/3\\1\\1/3\end{pmatrix}\right\}$ מכיוון שזה נפרש ע"י שני וקטורים זה לא יכול להיות שווה ל$\mathbb{R}^3$ (כי המימד שלו הוא 3) ולכן T לא על.

(ג) המטריצה שמצאנו היא $\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$. נדרג אותה...ונקבל $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן $\ker T=0$ מה שאומר ש T היא חח"ע.

מהדירוג הזה גם רואים ששלושת העמודות הראשונות הן קבוצה בת"ל, ומכיוון שהמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא גם 3 אז שלושת העמודות הראשונות הן בסיס ולכן:

$\mathrm{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$ מה שאומר ש T היא על.

(ד) המטריצה שקיבלנו היא $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$. אחרי דירוג נקבל $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן $\ker T=0$ מה שאומר שT חח"ע.

$\mathrm{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ נפרשת ע"י רק 2 וקטורים ולכן זה לא

יכול להיות שווה ל-$\mathbb{R}^3$ (שהוא ממימד 3) מה שאומר ש-T לא על.

(ה) המטריצה שקיבלנו היא $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. אחרי דירוג נקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

אין משתנים חופשיים ולכן $\ker T = 0$ מה שאומר ש-T היא חח"ע.

הדירוג גם מראה שהעמודות הן קבוצה בת"ל, ומכיוון שיש 3 עמודות והממימד של $\mathbb{R}^3$ הוא גם 3, אז העמודות זה בסיס ולכן:

$\mathrm{Im}T = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$ מה שאומר ש-T היא על.

3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות:

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_2-R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{R_3-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_3-R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1{\cdot}2{\cdot}0 = 0$$

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-9)1 = 10$$

(ג) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_2}{=} (-3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_3}{=} (-3)(3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_3-R_1}{=} (-9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \overset{R_3+2R_1}{=} (-9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-9)1{\cdot}1{\cdot}0 = 0$$

(ד) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_3-R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{R_3-R_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_4-2R_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \overset{-R_3,-R_4}{=} (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{R_3-R_4}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_4-2R_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot (-1)) = 1$$

(ה) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$