תרגול 7

קשירות

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא לא קשיר אם קיימות קבוצות V,U פתוחות לא ריקות כך ש $X=V\uplus U$ (איחוד זר). אחרת הוא יקרא קשיר.

(א) הערה: זה שקול להגדרה הבאה: מרחב הוא לא קשיר אמ"ם יש בו תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית (כלומר, לא קבוצה ריקה או כל המרחב)

(ב) דוגמא: $[0,1]\cup(2,3)$ לא קשיר.

(ג) דוגמא: $\mathbb{R}$ קשיר. $[0,1]$ קשיר.

(ד) דוגמא: $\mathbb{Q}$עם הטופולוגיה האוקלידית לא קשיר כי $\left(\sqrt{2},\infty\right)\cap\mathbb{Q}$ היא קבוצה סגוחה ב$\mathbb{Q}$.

(ה) שאלה: האם $(X,\tau_{\text{co-finite}})$ קשיר?
פתרון: חלקו למקרים לפי גודל הקבוצה X.

(ו) תרגיל: נגדיר על $\mathbb{R}$ טופולוגית סורגנפריי כך: τ_S להיות כל הקבוצות שמתקבלות מאיחוד כל שהוא של קטעים מהצורה $[a,b)$ עבור $a<b$. האם קשיר?
פתרון: לא. הוכיחו כי $[0,\infty)$ היא קבוצה סגוחה.

2. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ו$A\subseteq X$ תת קבוצה צפופה. הוכיחו שאם A קשירה (עם טופולוגיית תת המרחב, כמובן) אז X קשיר.
פתרון: נניח בשלילה שX לא קשירה. קיימות קבוצות פתוחות לא ריקות U,V כך ש$X=V\uplus U$. אז $A=(U\cap A)\uplus(V\cap A)$. הסבירו למה זהו פירוק לא טריוויאלי של A.

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות קשירות כך ש$cl_X(A)\cap B\neq\emptyset$. אז $A\cup B$ קשיר.
הוכחה: נניח בשלילה ש$A\cup B=U\uplus V$ כאשר UוV קבוצות פתוחות בתוך $A\cup B$ (שימו לב שזה לא אומר שהן פתוחות בX).
ראשית, הוכיחו כי בה"כ $A\subseteq U,B\subseteq V$. ניזכר כי $cl_{A\cup B}(A)=cl_X(A)\cap(A\cup B)$ (הוכחנו בתרגול קודם), לכן מההנחה נקבל ש $cl_{A\cup B}(A)\cap B\neq\emptyset$.
כעת, הסבירו למה U מכיל את $cl_{A\cup B}(A)$, והסיקו ש$U\cap V\neq\emptyset$, בסתירה להנחה.

4. תרגיל: אם $A\subseteq X$ תת קבוצה קשירה, האם $int(A)$ קשיר?
פתרון: לא. חישבו על דוגמא ב$\mathbb{R}^2$.

5. תרגיל: תמונה רציפה של קשיר הוא קשיר. כלומר תהא $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ רציפה ועל X קשיר, אזי Y קשיר.
פתרון: קחו פירוק לא טריוויאלי של Y ובנו באמצעותו פירוק לא טריוויאלי של X.

6. הגדרה: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. נגדיר יחס שקילות על X כך: $x\sim x'$ אמ"מ קיימת תת קבוצה קשירה A כך ש $x,x'\in A$. מחלקות השקילות נקראות רכיבי קשירות.
הערה: רכיב הקשירות של x הוא תת הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

(א) לדוגמא: ב (X,τ_{disc}) , רכיב הקשירות של x הוא $\{x\}$. הסבר: כל תת קבוצה A בת יותר מאיבר אחד אינה קשירה, כי ניתן לחלק $A=\{x\}\uplus A\setminus\{x\}$, שתיהן קבוצות פתוחות ב$A$. לכן $\{x\}$ היא הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

7. תרגיל: במרחב $(\mathbb{R},\tau_S)$, הישר של סורגנפריי, שהגדרנו לעיל, מהם רכיבי הקשירות?
פתרון: הנקודונים. הסבר: הוכיחו כי כל קבוצה בת יותר מאיבר אחד אינה קשירה.

8. תרגיל: תהא $f:\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)\to(\mathbb{R},\tau_S)$ רציפה . הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: השתמשו בתרגילים 5 ו7.

בסיסים

1. יהא (X,τ) מ"ט. $B_\tau\subseteq\tau$ (כלומר, אוסף של קבוצות פתוחות בτ) יקרא בסיס לטופולוגיה אם כל קבוצה פתוחה בτ היא איחוד כלשהוא של איברים ב B_τ.

(א) למשל, בכל מ"מ הכדורים הפתוחים הם בסיס.

(ב) הקטעים $[a,b)$ הם בסיס ל τ_S סונגרי.

(ג) הנקודונים בטופלוגיה הדיסקרטית.

2. בהינתן מרחב טופולוגי (X,τ) ובסיס B_τ, קבוצה $O\in B_\tau$ תיקרא "קבוצה פתוחה בסיסית".

3. תרגיל: יהא (Y,τ') מ"ט ויהא $B_{\tau'}$ בסיס לטופולוגיה. פונקציה $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ היא רציפה אמ"מ לכל תמונה הפוכה של קבוצת פתוחה בסיסית היא פתוחה.
פתרון: אתם יכולים לעשות את זה לבד.

4. תרגיל: יהא (X,τ) מ"ט ו B_τ בסיס. אזי A קבוצה צפופה אמ"מ היא נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בסיסית.
פתרון: כנ"ל.

5. תרגיל: יהא (X,τ) מ"ט. אזי הוא T_2 אמ"מ ניתן להפריד שתי נקודות בעזרת קבוצות פתוחות בסיסיות.
פתרון: כנ"ל.

6. הגדרה: תהא X קבוצה ותהא B אוסף תתי קבוצות המקיימת כי חיתוך של כל שניים מ B הוא איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. אזי נוכל להגדיר את הטופולוגיה הנוצרת ע"י B להיות כל הקבוצות שהם איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. נסמנה τ. נשים לב כי B הוא בסיס ל τ .

(א) למשל $B=\{a+b\mathbb{Z}:\ a,b\in\mathbb{Z}\}$ הוא בסיס לטופולוגיה על$\mathbb{Z}$.
הוכחה: אם $x\in(a_1+b_1\mathbb{Z})\cap(a_2+b_2\mathbb{Z})\neq\emptyset$ אזי

$$(a_1+b_1\mathbb{Z})\cap(a_2+b_2\mathbb{Z})=(x+b_1\mathbb{Z})\cap(x+b_2\mathbb{Z})=x+lcm\left\{b_1,b_1\right\}\mathbb{Z}$$

. $(\subseteq)$. כי $x+b_1z_1 = x+b_2z_2$ גורר $b_1z_1 = b_2z_2$ ולכן $b_1z_1 = b_2z_2 =$ $z \; lcm\left\{b_1,b_2\right\}$ וסיימנו.

$(\supseteq)$ $x+b_i\mathbb{Z} \subseteq x+lcm\left\{b_1,b_1\right\}\mathbb{Z}$ ולכן גם בחיתוך.

7. הגדרה: (X,τ) יקרא בעל תכונה B_2 (או בעל תכונת מניה שניה) אם יש לו בסיס בן מניה.

   (א) דוגמא: $\mathbb{R}$ עם הכדורים. $\left\{B(q,\epsilon):\; q\in\mathbb{Q}, \epsilon\in\mathbb{Q}_+\right\}$.

8. תרגיל: האם $(X,\tau_{co-finite})$ הוא B_2?
   פתרון: חלקו למקרים לפי הגודל של X.

9. תרגיל: תת מרחב של B_2 הוא B_2.
   פתרון: קחו בסיס בן מניה של המרחב הגדול, ובנו באמצעותו בסיס בן מניה של המרחב הקטן (הסבירו למה הקבוצה שבניתם היא אכן בסיס).

10. תזכורת: (X,τ) יקרא ספרבילי אם יש תת קבוצה צפופה בת מניה.

11. תרגיל: B_2 גורר ספרבילי.
    פתרון: נבחר נקודה מכל קבוצה פתוחה בסיסית. הסבירו למה זאת תת קבוצה צפופה.

    (א) הכיוון השני אינו נכון. למשל X שאינו בן מניה והטופלוגיה הקו-סופית: הוא לא B_2 אבל כן ספרבילי כי עבור קבוצה בת מניה A היא תהיה צפופה ב X. כי הוכחנו שכל תת קבוצה אינסופית היא צפופה.

12. הערה: במרחב מטרי B_2 שקול ספריבילי.

13. תרגיל: l_∞ אינו B_2 (ולכן לא ספרבילי).
    הוכחה: נעזר בתרגיל 9. מצאו תת מרחב של l_∞ שהוא דיסקרטי ולא בן מניה, ולכן לא B_2.

14. תרגיל: l_1 הוא ספרבילי (ולכן B_2):
    הוכחה: ניקח סדרות רציונאליות שמתאפסות לבסוף. הראו שקבוצה זאת נחתכת באופן לא ריק עם כל כדור $B\left(\left(x_n\right),r\right)$.