תרגיל 9 – אלגברה מופשטת 1

1. תהי G חבורה, ו- $A,B \le G$ שתי תת חבורות שלה. הוכיחו שכל שתיים מבין התכונות הבאות גוררות את השלישית:

א. $A \bigcap B = \{1\}$;

ב. $AB = G$;

ג. $|A| \cdot |B| = |G|$.

פתרון: נגדיר פונקציה $f: A \times B \to G$ על-ידי $f(a,b) = ab$. מתקיים:

f חח"ע $\Leftrightarrow$ תנאי א' מתקיים;

f על $\Leftrightarrow$ תנאי ב' מתקיים.

כלומר, כעת השאלה היא:

יהיו X,Y קבוצות ותהי $f: X \to Y$ פונקציה. אזי כל שניים מהתנאים הבאים גוררים את השלישי:

א. f חח"ע;

ב. f על;

ג. $|X| = |Y|$.

ואת הטענה הזאת אנחנו כבר מכירים מבדידה.

2. תהי G חבורה מסדר pq עבור p,q ראשוניים שונים. נתון כי יש ל G תת חבורה נורמלית מסדר p ותת חבורה נורמלית מסדר q. הוכיחו כי G ציקלית.

הוכחה: תהי $P_p \lhd G$ תת חבורה נורמלית מסדר p ו $P_q \lhd G$ תת חבורה נורמלית מסדר q. מכיוון ש $P_p \lhd G$ ו $P_q \lhd G$ $P_pP_q \le G$ (ואפילו ת"ח נורמלית). מתקיים $P_p, P_q \lhd P_pP_q$, $P_p \cap P_q = \{e\}$ (מכיוון ש $(|P_p|, |P_q|) = (p,q) = 1$) ו $P_p \cdot P_q = P_pP_q$. לכן P_pP_q היא מכפלה ישרה פנימית של P_p, P_q. נובע שהיא איזומורפית למכפלה הישרה החיצונית שלהם": $P_pP_q \cong P_p \times P_q$. אבל p ו q ראשוניים זרים לכן $P_pP_q \cong P_p \times P_q \cong Z_p \times Z_q \cong Z_{pq}$.

לסיום נשים לב כי $P_pP_q \le G$ כך ש $|P_pP_q| = |P_p \times P_q| = p \cdot q = |G|$ לכן, $P_pP_q = G$

ו G ציקלית.

3. תהי G חבורה ו $H,K \le G$ תת חבורות משלימות. הוכיחו:לכל $h \in H, k \in K$ הקומוטטור, $[h,k]=e$ אם ורק אם H,K תת חבורות נורמליות של G.

הוכחה: ראינו בתרגול את הגרירה משמאל לימין. עבור הגרירה ההפוכה, נניח ש לכל $h \in H, k \in K$ הקומוטטור, $[h,k]=e$ ונוכיח כי $H \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית. ההוכחה עבור K זהה.
יהיו $h \in H$ ו $g \in G$. מ"ל כי $ghg^{-1} \in H$.
אבל, $g \in G = HK$ גורר שקיימים $h' \in H, ' \in K$ כך ש $g = h'k'$. לפי הנתון, $[h,k']=e$. לכן, h,k' מתחלפים. לכן:
$ghg^{-1} = h'k'hk'^{-1}h'^{-1} = h'hk'k'^{-1}h'^{-1} = h'hh'^{-1} \in H$ כדרוש.
הערה: נובע כי ניתן להגדיר מכפלה ישרה פנימית באופן הבא: G היא מכפלה ישרה פנימית של תת חבורות H,K אם הן משלימות וכל איבר מ H מתחלף עם כל איבר מ K.

4. תהי G חבורה סופית ו $H \le G$ תת חבורה מאינדקס 2. נניח שקיים אפימורפיזם $\varphi : G \to H$ כך ש $Ker\varphi$ לא מוכל ב H. הוכיחו כי $G \cong H \times Z_2$.

הוכחה: לפי משפט האיזו הראשון: $G/Ker\varphi \cong H$. בפרט, $|Ker\varphi| = \frac{|G|}{|H|} = [G:H] = 2$. לכן $Ker\varphi \cong Z_2$.
נראה כי $H, Ker\varphi$ נורמליות ומשלימות ונקבל ש G מכפלה ישרה פנימית, ולכן גם חיצונית שלהם, כדרוש.
מכיוון ש $H \le G$ תת חבורה מאינדקס 2, $H \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית.
הגרעין של הומומורפיזם הוא תמיד תת חבורה נורמלית. לכן, $Ker\varphi \triangleleft G$.
נראה כי $G = Ker\varphi \cdot H$ וכן כי $Ker\varphi \cap H = \{1\}$.

לפי הנתון, $Ker\varphi$ לא מוכל ב H. יהי $a \in Ker\varphi \setminus H$. אזי, הקוסטים $aH \neq H$ הם שני קוסטים שונים. בפרט, מכיוון ש $H \le G$ תת חבורה מאינדקס 2, $G = H \cup aH = 1H \cup aH \subseteq Ker\varphi \cdot H \cup Ker\varphi \cdot H = Ker\varphi \cdot H$.
ההכלה ההפוכה בבירור נכונה לכן, $G = Ker\varphi \cdot H$.

על מנת להוכיח ש $Ker\varphi \cap H = \{1\}$ נשתמש בשאלה 1. ראינו כי $G = Ker\varphi \cdot H$. מצד שני, $|G| = |Ker\varphi| \cdot |H|$ לפי לגרנז'. לכן משאלה 1 נובע כי $Ker\varphi \cap H = \{1\}$.

לכן, G מכפלה ישרה של $H, Ker\varphi$ כלומר: $G \cong H \times Ker\varphi \cong H \times Z_2$

5. ענו על הסעיפים הבאים:

5.1 תהי G חבורה לא ציקלית מסדר p^2 עבור p ראשוני. הוכיחו כי $G \cong Z_p \times Z_p$

רמז: קחו תת חבורה ציקלית H מסדר p של G. קחו איבר שלא שייך לחבורה H והוכיחו כי הוא יוצר תת חבורה K מסדר p של G כך ש K ו H משלימות ונורמליות.

הוכחה: G חבורה אבלית בתור חבורה מסדר p^2. מכיוון ש G אינה ציקלית אין ב G איבר מסדר p^2. לפי לגרנז' הסדר של כל איבר ב G הוא 1 או p או p^2.

לכן, לכל $e \neq a \in G$, $o(a) = p$.

יהי $e \neq a \in G$, $|<a>| = p$ לכן קיים $b \notin <a>$ שאינו הזהות.

טענה: $<a>, <b>$ הן תת חבורות משלימות ב G.

הוכחה: ראשית נראה כי $<a> \cap <b> = \{e\}$.

נשים לב: $<a> \cap <b> \leq <a>$ אבל, תת החבורות היחידות של חבורה ציקלית מסדר ראשוני הן החבורה עצמה ותת החבורה הטרוויאלית (למשל כי ממשפט לגרנז' נובע שהסדר של תת חבורה חייב להיות p או 1).

מכיוון ש $b \notin <a>$, $<a> \cap <b> \neq <a>$. לכן, $<a> \cap <b> = \{e\}$.

כעת, $p^2 = |G| = |<a>||<b>|$ לכן לפי שאלה 1, $G = <a><b>$

ותת החבורות $<a>, <b>$ הן תת חבורות משלימות ב G.

מכיוון ש G אבלית, הן בהכרח תת חבורות נורמליות שלה. לכן לפי המשפט על מכפלה ישרה פנימית, $G \cong <a> \times <b> \cong Z_p \times Z_p$.

5.2 תהא G חבורה לא אבלית מסדר 2197. הוכיחו כי $G/Z(G)$ היא חבורה אבלית, לא ציקלית ומצאו את הסדר שלה.

פתרון: נשים לב, $2197 = 13^3$. לפי תרגיל מהתרגול, לכל חבורה מסדר p^3 עבור p ראשוני, הסדר של המרכז הוא p. בפרט, אצלינו, הסדר של המרכז הוא 13 ו $|G/Z(G)| = 13^2$. שוב, לפי תרגיל מהתרגול, $G/Z(G)$ חבורה אבלית. אם $G/Z(G)$ היתה ציקלית היה נובע כי G אבלית בסתירה לנתון. לכן G אינה ציקלית.

5.3 זהו את החבורה $G/Z(G)$ עד כדי איזומורפיזם.

פתרון: מכיוון ש $|G/Z(G)| = 13^2$, לפי סעיף א', $G/Z(G) \cong Z_{13} \times Z_{13}$.

6. הגדרה:עבור חבורה G ומספר ראשוני p, נגדיר תת חבורה

$$G^p = <x^p : x \in G>$$

להיות תת החבורה הנוצרת ע"י כל האיברים מהצורה x^p ב G. ענו על הסעיפים הבאים.

6.1. יהיו G,H חבורות ו $\varphi: G\to H$ אפימורפיזם. הוכיחו כי G^p מוכלת בתמונה ההפוכה של H^p. דהיינו, כי $G^p \subseteq \varphi^{-1}(H^p)$

הוכחה:
נראה כי לכל $x\in G$, $x^p \in \varphi^{-1}(H^p)$.
אז, מכיוון ש $\varphi^{-1}(H^p)$ היא תת חבורה של G, היא תכיל גם את תת החבורה הנוצרת על ידי האיברים מהצורה x^p, דהיינו היא תכיל את G^p.
אבל, $\varphi(x)^p \in H^p \Leftrightarrow \varphi(x^p)\in H^p \Leftrightarrow x^p \in \varphi^{-1}(H^p)$ מה שנכון על פי הגדרת H^p. לכן, $G^p \subseteq \varphi^{-1}(H^p)$.

6.2. תהי $G\neq 1$ חבורת p סופית. הוכיחו כי $G^p < G$ היא תת חבורה ממש (דהיינו, שונה מ G)
רמז: אינדוקציה על הסדר של G.

הוכחה: הסדר של G הוא p^n עבור n טבעי כלשהו. נוכיח כי הטענה נכונה באינדוקציה על n.

עבור $n=1$, G חבורה ציקלית מסדר p, בפרט לכל $x\in G$, $x^p=e$ ו

$G^p =< x^p : x\in G >=< e >= \{e\} < G$ היא תת חבורה ממש.

נניח כי הטענה נכונה לכל הטבעיים עד n מסויים (כולל) ונוכיח את הטענה עבור n+1 .

תהי G חבורה מסדר p^{n+1}. אזי המרכז $Z(G)$ אינו טרוויאלי.

מכיוון שהמרכז הוא ת"ח נורמלית ניתן להתבונן בחבורת המנה: $G/Z(G)$. זוהי חבורת p מסדר קטן יותר. לכן, לפי הנחת האינדוקציה,

$K := \left(G/Z(G)\right)^p < G/Z(G)$ היא תת חבורה ממש.

יהי $\varphi: G\to G/Z(G)$ האפימורפיזם הטבעי (השולח כל איבר לקוסט שלו).

אזי, לפי חלק א', $G^p \subseteq \varphi^{-1}\left((G/Z(G))^p\right)$.

מכיוון ש φ אפימורפיזם ו $K := \left(G/Z(G)\right)^p < G/Z(G)$ היא תת חבורה ממש, גם התמונה ההפוכה שלה היא תת חבורה ממש של G.

לכן, $G^p \le \varphi^{-1}\left((G/Z(G))^p\right) < G$ כדרוש.

בהצלחה! ☺