אינפי 2 -תרגיל 9 פתרון

.1

א. מצאו 3 רכיבים ראשונים בטור טיילור של $\sin \pi x$ סביב הנק' $a = 0.5$.

ב. בעזרת הפיתוח שמצאתם בסעיף א' מצאו קירוב ל- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)$.

פתרון:

$$\sin \pi x = \sin \pi\left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos \pi\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n} = 1-\frac{\pi^2}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\pi^4}{4!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\ldots$$

או לחלופין ניתן להשתמש בהגדרה של טור טיילור של הפונקציה $\sin \pi x$ סביב הנק' $a = 0.5$ ולקבל:

$f(x) = \sin \pi x$. So $f^{(1)}(x) = \pi \cos \pi x$, $f^{(2)}(x) = -\pi^2 \sin \pi x$, $f^{(3)}(x) = -\pi^3 \cos \pi x$, $f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x$ and so

$$\sin \pi x = \sin\frac{\pi}{2}+\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!}\times(-\pi^2)+\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!}\times(\pi^4)+\ldots = 1-\pi^2\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!}+\pi^4\frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!}+\ldots$$

ב. בעזרת הפיתוח שמצאתם בסעיף א' מצאו קירוב ל- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)$.

פתרון: נציב $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ בפיתוח שמצאנו בסעיף א'

$$\sin \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\right) = 1-\pi^2\frac{(\frac{1}{10})^2}{2!}+\pi^4\frac{(\frac{1}{10})^4}{4!}+\ldots \quad = 1-0.0493+0.0004 \quad = 0.9511$$

.2

המשוואה $e^{-2x} = 3x^2$ בעלת שורש בסביבת $x = 0$.

מצאו קירוב לשורש זה בעזרת טור טיילור המתאים ל- e^{-2x} .

פתרון:

$$e^{-2x} \approx 1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}=1-2x+2x^2 .$$

$$\Rightarrow \; 1-2x+2x^2=3x^2$$

$$x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}0.414 \\ -1.41\end{cases}$$

.3

בעזרת טור מקלורן של e^x, עבור $x=\frac{1}{2}$, חשבו את $\sqrt{e}$ בדיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה.

פתרון:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר c בין 0 ל-x.

מכאן, עבור $x=\frac{1}{2}$ נקבל:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\cdots+\frac{1}{2^n n!}+\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}$$

כאשר c בין 0 ל-$\frac{1}{2}$. גודל השגיאה בקרוב הוא אם כן:

$$|R_n|=\left|\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}\right|<\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$$

הדיוק הרצוי הינו 4 ספרות אחרי הנקודה, לכן

$$\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}<0.00005$$

נקבל כי $n=6$ והקרוב הרצוי הינו

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\frac{1}{2^4 4!}+\frac{1}{2^5 5!}+\frac{1}{2^6 6!}=1.6487$$

.4

חשבו את הגבול (או הוכיחו שלא קיים):

א) $\left\{\left(\frac{n^3+4n-5}{n^6+2n^2-3}, n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ברכיב הימני מופיעה פונקצית הערך השלם)

ב) $\left\{\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right), \frac{n^2}{2^n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

א) $\lim_{n\to\infty}\left(n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right)$ לא קיים ולכן גם לסדרה המבוקשת לא קיים גבול. נראה ש $\lim_{n\to\infty}\left(n-7\left[\frac{n}{7}\right]\right)$ לא קיים. אמנם עבור $n=7k$ נקבל $\lim_{k\to\infty}\left(7k-7\left[\frac{7k}{7}\right]\right)=\lim_{k\to\infty}(7k-7k)=0$.

עבור $n=7k+1$ נקבל

$\lim_{k\to\infty}\left(7k+1-7\left[\frac{7k+1}{7}\right]\right)=\lim_{k\to\infty}\left(7k+1-7\left[k+\frac{1}{7}\right]\right)=\lim_{k\to\infty}(7k+1-7k)=1$ ומצאנו 2 גבולות חלקיים שונים לסדרה ולכן לא קיים גבול.

ב) נבדוק התכנסות רכיב רכיב. ברכיב הראשון $\frac{1}{n}\to 0$, סינוס רציפה באפס ולכן לפי אינפי' אחד הגבול כולו הינו אפס. ברכיב השני, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2}\to\frac{1}{2}$ ולפי מבחן דלאמבר (מבחן המנה) הטור מתכנס, ולכן האיבר הכללי שלו (הסדרה הנתונה) שואף לאפס. לכן סה"כ גבול הסדרה הינו $(0,0)$.

.5

חשבו את הגבולות של הפונקציות הבאות (או הוכיחו כי אינם קיימים):

א) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(y^2\right)$

ב) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2}$

ג) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to1}} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$

ד) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

א) $0 \le \frac{x^2}{|x|+|y|} \le \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0$, $\cos\left(y^2\right)$ חסום ולכן כמו באינפי' 1 קל להראות שהגבול הינו אפס (משפט הסנדוויץ').

ב) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2}$ לא קיים. נראה עפ"י מסלולים:

א) $x=0, y\to0$: נקבל $\lim\limits_{\substack{x=0\\y\to0}} \frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to0} \frac{y^2}{y^2} = 1$

ב) $y=0, x\to0$: $\lim\limits_{\substack{y=0\\x\to0}} \frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$

קיבלנו גבולות שונים עפ"י מסלולים שונים ולכן הגבול המבוקש לא קיים.

ג) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{\arcsin(xy-2)}{arctg(3xy-6)}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{\arcsin(xy-2)}{arctg(3(xy-2))}$

נציב $t=xy-2$ ונקבל כי הגבול שווה ל- $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{arctg(3t)}$ קיבלנו גבול מהצורה $\dfrac{0}{0}$ עפ"י לופיטל

נקבל $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{3}{1+(3t)^2}}=\dfrac{1}{3}$.

ד) נפריך את קיום הגבול על ידי מסלולים שונים : $x=ky$, $y\to 0$ נותן גבול $\dfrac{ky^2}{k^2y^2+y^2}=\dfrac{k}{k^2+1}$. ברור שעבור ערכים שונים של הקבוע k נקבל גבולות שונים. לכן לא יכול להיות גבול.

6.

האם ניתן להגדיר את הפונקציות הבאות ב $(0,0)$ כך שתהיינה רציפות (אם כן, כיצד?)

א) $f(x,y)=x\ln\left(x^2+3y^2\right)$

ב) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

א) $f(x,y)=x\ln\left(x^2+3y^2\right)$

$\left|f(x,y)\right|=|x|\left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|\le|x|\left|\ln\left(x^2\right)\right|\to 0$ לפי לופיטל. אי השיוויון נכון עבור x,y קטנים מספיק כך ש $x^2+3y^2<1$ ואז הלוגריתם הופך לשלילי. לכן לפי הסנדוויץ הגבול הינו 0 ואם נגדיר את הפונקציה בנקודה להיות $f(0,0)=0$ היא תהיה רציפה.

דרך נוספת לפתור את התרגיל: נסמן $r^2=x^2+3y^2$. מתקיים $x^2\le r^2$ ולכן $|x|\le r$. כעת אפשר לחסום את הפונקציה באופן הבא: $0\le|x|\left|\ln\left(x^2+3y^2\right)\right|\le r\left|\ln\left(r^2\right)\right|$. לפי להופיטל מחשבים את הגבול של הביטוי מימין, ואז לפי משפט הסנדוויץ' מקבלים את הדרוש.

ב) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$

ניקח מסלולים $y=kx, x\to 0$ לקבל $f(x,kx)=\dfrac{k+1}{k-1}$ וברור שעבור ערכים שונים של k נקבל גבולות שונים ולכן אין גבול בנקודה, ולכן אין דרך להגדיר את הפונקציה בנקודה כך שהיא תהיה רציפה.

7.

בדקו את רציפות הפונקציה בנקודה $(1,2)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+\sin^2(y-2)} & ,(x,y)\neq(1,2)\\ 0 & ,(x,y)=(1,2)\end{cases}$$

נזיז את הפונקציה לצורך נוחות החישוב, $g(x,y)=f(x+1,y+2)=\dfrac{xy}{x^2+\sin^2 y}$ ונסתכל על הגבול בראשית $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. נסתכל על המסלול $x=y\to 0$ לקבל $\dfrac{x^2}{x^2+\sin^2 x}=\dfrac{1}{\frac{x^2+\sin^2 x}{x^2}}\to\dfrac{1}{2}$.

אבל עבור המסלול $y=0, x\to 0$ הגבול הוא אפס. לכן סה"כ אין גבול ולכן הפונקציה אינה רציפה (שימו לב שיכלנו לעצור ברגע שראינו שיש מסלול עם גבול שונה מאפס).